I-19　マトリクス構造解析におよぼす構造物の形状の影響

京都大学工学部　正員　谷口健男
京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　正員　古田均

1. まえがき

マトリクス構造解析で取り扱われる構造解析モデルは，モデルを構成する構造要素の力学特性，空間内における各構造要素の位置を示す幾何学的特性，及びそれらの組み合わせを示す位相幾何学的特性により構成される。例えば一つの系の荷重－変位の関係は，次に示すような連立一次方程式で示され，その係数行列 K にそれら全ての特性が包含される。ここで，p，u は荷重，変位ベクトルとする。

$$P = K \cdot u \qquad (1)$$

通常 K は疎行列であり，また帯行列となるといわれるが，これらは上記第3の特性によるものである。

一方，数値解析における疎行列を係数行列とする連立一次方程式の解法には，帯行列法，ウェーブフロント法，スパースマトリクス法等があり，帯行列法のみに話を限っても，固定帯行列，変動帯行列，プロファイルを用いる方法があり，それぞれが取り扱う係数行列内の非零要素の配列方法が異なる。

本研究は，この帯行列のさまざまな非零要素配列法に注目し，それぞれが扱う行列のグラフ表現を行うことにより，扱いうるグラフを分類し，その結果を構造物の位相構造をあらわすグラフと対比せしめ，その系の構造解析のための連立一次方程式の解法の選択方法を示すことを目的とする。

2. 固定帯行列，変動帯行列およびプロファイルのグラフ表現

まず，扱う帯行列について次の仮定を置く。係数行列は，正定値，対称性を有し，その各行（列）は対角要素を除き，少くとも1個の非零要素をもつ。これらの仮定は，通常の構造解析で扱う係数行列では，ほとんど満たされているものであり，非零要素の個数に関する仮定は，その係数行列は1個の構造物，グラフでいえば，1つの連結グラフのみを扱うことを示す。このような仮定のもと，固定帯幅をもつ行列，変動帯幅をもつ行列，および列方向に凹凸を有するプロファイル（それぞれ，図1－a，b，c 及び c'）のグラフ表現を考える。$(n \times n)$ 行列に対し，n点を考え，係数行列の第i行（列），k_i，に対し第i番目の点，v_i，を対応せしめる。Kの上三角行列のみに注目し，

$$\begin{cases} \text{もし } k_{ij} \neq 0 \text{ ならば } v_i \text{ と } v_j \text{ を線で結ぶ。} \\ \text{もし } k_{ij} = 0 \text{ ならば } v_i \text{ と } v_j \text{ は結ばない。} \end{cases} \qquad (2)$$

の操作を全ての k_{ij} について行うことにより，Kを1つのグラフ $G(n,m)$ で表現しうる。ここで m はグラフGの有する線の数であり，Kの上三角行列内非零要素数に一致する。なお，図1において，斜線部内のみに全ての非零要素が配置されており，この領域の最外側は少くとも全て非零要素である。領域内部には零要素の存在を許すものとする。この全ての行列は上述のごとく，1つの系のみを扱うことより，プロファイルには c 及び c' という2種類の係数行列内非零要素配列パターンが考えられる。（2）式に従い，図1の各係数行列のグラフ表現したものが，図2－a，b，c 及び c' として与えられる。図2において，1つの丸印は，グラフGの連結部分グラフ（Gの部分グラフであって連結なもの）を示し，その大小は，部分グラフに含まれる点個数の多少を示す。また1本の線は，2個の部分グラフが互に連結されていることを示す。すなわち，少くとも連結されておれば，1本の線として表わされるものとする。

図2－a，bの固定，及び変動帯行列に対応する2個のグラフは，本質的に差はなく，同一カテゴリー，すなわち，分岐のないトリーグラフと呼ばれるグラフに属す。プロファイルに対応する2個のグラフ（図2－c 及び c'）は，それぞれ メッシュグラフ および 分岐を有するトリーグラフとして表現される。

このように、帯行列より得られるグラフは基本的には上記3種のグラフであることが得られた。 なお、プロファイルの係数行列には、その非零要素の存在を示す突出領域の数を増やす等により、さまざまなパターンが存在するが、それらは全て、上記2つのパターンの組み合わせと考えられるものである。

3. 帯行列のグラフによる構造系の分類

なお構造系とは、マトリクス構造解析で扱われる離散モデルを示す。

Type 1. 分岐のないトリーグラフに該当する解析モデル.

このグラフは、いくつかの連結グラフ（その中に含まれる点個数には、あまり差がない）が直列に並んだようなグラフである。各部分グラフには、あまり点個数の差が大きくないことより、一般的表現を用いれば、解析モデルの太さがあまり変化しないようなものが考えられる。よって、このようなグラフに対応するモデルとしては、矩形板等の有限要素モデル，トラス橋，吊り橋，ラーメン構造等が挙げられよう。

Type 2. 分岐のあるトリーグラフに該当する解析モデル

このグラフは、3個以上の連結グラフが1個の連結グラフとそれぞれ直接連結された形をしたグラフであり、例えばテトラポットのように突出部をもっているようなものをいう。構造物の例を挙げれば、送電鉄塔、外周辺形状が複雑に入り組んだ連続体 および 応力集中部を有する連続体の有限要素モデル等がある。

Type 3. メッシュグラフに該当する解析モデル

これは、いくつかの連結グラフが環状につながっているようなグラフである。このようなグラフに該当する構造物として、穴あき板の有限要素モデル，ファンおよびハープタイプの斜張橋，さらに内部に空間を有するトラス・あるいはラーメン構造物等が挙げられる。

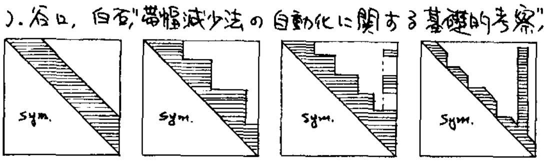
4. マトリクス構造解析のための係数行列作成

第3節の結果に従って解くべき解析モデルに対して用いるべき数値解法が選択できたとき、次に行なわねばならないことは、実際に その係数行列を作ることである。すなわち、モデルの節点にうまく1～nの番号を与え、選択した数値解法の扱う係数行列の非零要素パターンを作らねばならない。 固定、及び変動帯行列に該当する分岐のないトリーグラフに対しては、(例えば) Cheng's Algorithm[1] で十分良い結果を得ることができる。プロファイル型の系においても、例えば分岐を有するトリーグラフでは、その部分グラフに対して 上記アルゴリズムで十分良い結果を導くことができる。よって、残る問題は、それらの間の組み合わせ方法であるが、純粋なトリーグラフに対する方法[2]をそのまま適用することにより、この問題は解決する。残るメッシュ型構造に対しては、いずれかの部分グラフ間の連結を仮りに切断すれば 上記アルゴリズムが適用できるようになる。

5. あとがき

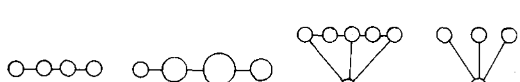
今日まで、マトリクス構造解析における数値解析では、構造モデルを、あえて数値解析にあてはめるという方法がとられ、よってラベリング問題は、非常に解決困難とみなされてきた[3]。本研究は、各数値解法の得意とするグラフを見い出し、その結果と解析モデルのもつグラフを対比せしめ、ラベリングの容易な数値解法を選ぶという手法の提案を行った。この方法は、マトリクス構造解析の自動化を容易にするものと思われる。

[参考文献] 1). K.T.Cheng,"Minimizing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices", Computing 11. pp.103-110, 1973
2). 白石，谷口,"構造解析のための節点番号付け最適化手法について," 電算機利用に関するシンポジウム, pp.5-8, 1976
3). 谷口，白石,"帯幅減少法の自動化に関する基礎的考察", 第32回土木学会年次学術講演会概要集，I-59, 1977



(a).固定帯行列 (b)変動帯行列 (c) プロファイル 1 (c') プロファイル (2)

図−1. 帯行列内非零要素領域


(a) 分岐のないトリー (b) 分岐のあるトリー (c) メッシュ (c') 分岐のあるトリー

図−2. 帯行列のグラフ表現