

センチュリリサーチセンタ 正員 渡辺 隆之

1. はじめに

今日、高温構造物に対して2次元有限要素モデルを用いた非弾性解析は、一般的に行なわれるようになりこれに従って2次元的なモデル化が行なえない場合が生じてきている。このときは、3次元モデルの非弾性解析が必要となるが現実的な問題として記憶容量、計算時間等が膨大なものとなり問題が生じてくる。このような問題を緩和するために詳細解析の必要な領域は、3次元中実要素として他の領域は平板殻と梁要素を用いてモデル化するための体積を持たない仮想的な結合要素について論ずる。解析例としては、円周方向に貫通き裂を有する直管の弾塑性解析結果を3次元中実要素のみでモデル化した結果および実験結果と比較する。

2. 変分原理

図1.に示すように領域 V を仮想的に部分領域 $V^{(1)}$ と $V^{(2)}$ に分割する。このとき2つの領域における物理量は、仮想境界面 $S^{(12)}$ 上で連続とする。これより変分式は、微小変位理論に基づく基礎方程式と境界面 $S^{(12)}$ 上における変位の連続条件を $Lagrange$ の未定乗数 $\{\lambda\}$ を用いて仮想仕事の原理を増分形で表わすと次のようになる。¹⁾

$$\begin{aligned} & \delta \left[\int_{V^{(1)}} (\delta \{ \epsilon \}^{(1)})^T \Delta \{ \sigma \}^{(1)} dV - \int_{V^{(1)}} (\delta \{ u \}^{(1)})^T \Delta \{ \bar{p} \}^{(1)} dV \right. \\ & \left. - \int_{S_0^{(1)}} (\delta \{ u \}^{(1)})^T \Delta \{ \bar{t} \}^{(1)} dS \right] - \delta \int_{S^{(12)}} \Delta \{ \lambda \}^T (\Delta \{ \bar{u} \}^{(1)} - \Delta \{ \bar{u} \}^{(2)}) dS \\ & = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

境界面 $S^{(12)}$ 上の付帯条件は、次のように表わしている。

$$\Delta \{ \bar{u} \}^{(1)} = \Delta \{ \bar{u} \}^{(2)} \quad (2)$$

ここで $\sum V^{(1)} = V$ であり添字 (α) 、 $\alpha = 1, 2$ は、仮想領域を表わす。 $\Delta \{ \sigma \}$ と $\Delta \{ \epsilon \}$ は応力とひずみの列マトリックスであり $\Delta \{ \bar{p} \}$ と $\Delta \{ u \}$ は既定物体力と変位の列マトリックスそして $\Delta \{ \bar{t} \}$ と $\Delta \{ u \}$ は境界面 S_0 上の既定表面力と $S^{(12)}$ 上の変位の列マトリックスである。(1)式はハイブリッド型仮想仕事の原理²⁾とも言われ(2)式の連続条件を繰入れた変分式となっている。

3. 有限要素法による定式化

要素内の変位と $Lagrange$ の未定乗数を仮定する。

$$\Delta \{ u \}^{(\alpha)} = [\phi]^{(\alpha)} \Delta \{ \hat{u} \}^{(\alpha)} \quad \text{in } V^{(\alpha)} \quad (3)$$

$$\Delta \{ \bar{u} \}^{(\alpha)} = [\hat{\phi}]^{(\alpha)} \Delta \{ \hat{u} \}^{(\alpha)} \quad \text{on } S^{(12)} \quad (4)$$

$$\Delta \{ \lambda \} = [\hat{\phi}] \Delta \{ \hat{\lambda} \} \quad \text{on } S^{(12)} \quad (5)$$

$[\phi]$, $[\hat{\phi}]$, $[\hat{\phi}]^*$ は、補間関数であり平衡方程式は、(1)式を用いて次のように表わせる¹⁾。

$$\begin{bmatrix} [K]^{(1)} & [0] & [\hat{K}]^{(1)} \\ & [K]^{(2)} & [\hat{K}]^{(2)} \\ SYM. & [0] & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \{ \hat{u} \}^{(1)} \\ \Delta \{ \hat{u} \}^{(2)} \\ \Delta \{ \hat{\lambda} \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \{ \bar{p} \}^{(1)} \\ \Delta \{ \bar{p} \}^{(2)} \\ \{ 0 \} \end{bmatrix} \quad (6)$$

4. 仮想的な結合要素

(1) 板殻と梁要素間の結合要素

ここでは、配管問題を想定し殻側の軸方向変位を図2.に基づいて面外変位を含め線形変化を仮定した。

また回転角は、図3.より関係を表わした。

$$\Delta \bar{u}_i = \hat{\phi}^1 \Delta \bar{u}_i^1 + \hat{\phi}^2 \Delta \bar{u}_i^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

$$\Delta \bar{\theta}_1 = \frac{1}{r} \{ \Delta \bar{u}_3^1 - (\hat{\phi}^1 \bar{u}_3^1 + \hat{\phi}^2 \bar{u}_3^2) \} \quad (8)$$

$$\Delta \bar{\theta}_2 = \frac{1}{r} (\Delta \bar{u}_3^1 - \Delta \bar{u}_3^2) \quad (9)$$

$$\Delta \bar{\theta}_3 = -\frac{1}{r} (\Delta \bar{u}_2^1 - \Delta \bar{u}_2^2) \quad (10)$$

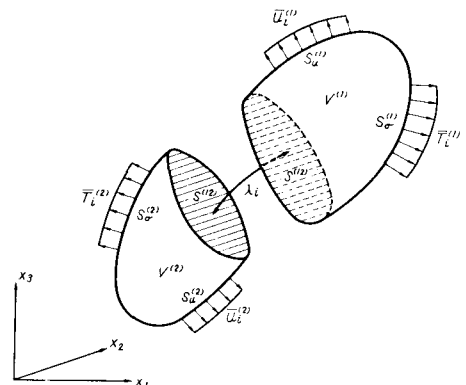


図1. 問題の定義

ここで右上添字は節点番号、右下添字は自由度方向を表わしている。 l は節点12間の長さである。

(2) 3次元中実要素と殻要素間の結合要素(図4)

中実要素に対応する8節点要素の軸方向変位は、次式で表わす。また回転角は、次式による。

$$\Delta \hat{u}_i = \hat{\phi}_i \Delta \hat{u}_i^* + \dots + \hat{\phi}_8^* \Delta \hat{u}_i^*, \quad i=1,2,3 \quad (11)$$

$$\Delta \hat{\theta}_k = \frac{1}{2} e_{kij} \Delta w_{ij}, \quad i,j=k=1,2,3 \quad (12)$$

ここで e_{kij} は置換テンソル、 Δw_{ij} は回転テンソル³⁾である。

以上より(7)~(10)と(11)(12)をそれぞれ梁要素の自由度と殻要素の自由度にLagrangeの未定乗数(この場合 $[\hat{\phi}]$)は、 6×6 の単位マトリックスを仮定している)を通して関係づける。

5. 計算例

円周方向に貫通き裂を有する直管の弾塑性解析結果を示す。図5ではモデル化の概念図を示し、直管の左端を完全固定、自由端にせん断力を作用させている。結果として図6は、外表面の開口変位を示した。同時に20節点中実要素だけによる結果と実験結果と比較のためにまとめた。⁶⁾

6. 参考文献

- 1) 渡辺、武田、矢川 "Lagrange Multipliers を用いた3次元連続体の解析", 第32回講演集
- 2) 鷲津 "弾性学の変分原理概論", 培風館
- 3) Fung, Y. C. "固体の力学/理論", 培風館

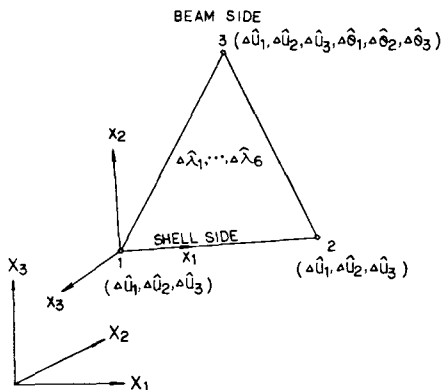


図2. 殻と梁要素間の結合要素

4) 安藤他, JWE S-AE-7706, 日本溶接協会, 昭52

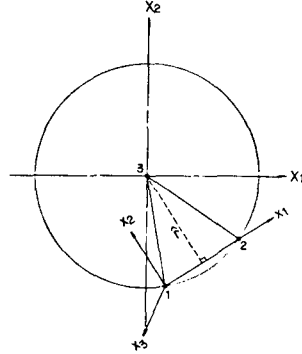


図3. 配管に対する応用例

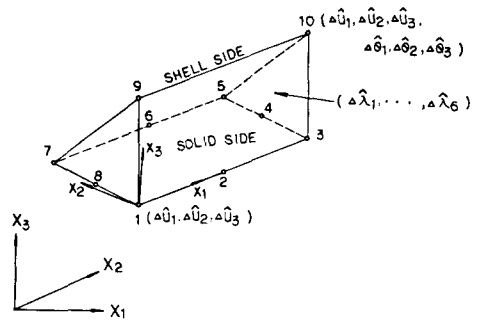


図4. 殻と中実要素間の結合要素

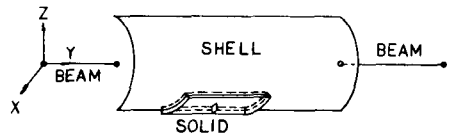


図5. モデル化の概念図

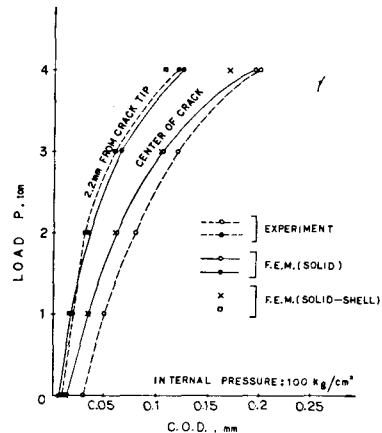


図6. 外表面開口変位