

京都大学大学院 学生員 ○吉田幸司
京都大学工学部 正会員 小林昭一

1. はじめに

最近になって、積分方程式による解法が注目を浴びるようになり、種々の問題にその適用がはかられている。積分方程式解法自体は、境界条件を満足するように、場の方程式を境界上で積分するだけであるので、き裂の伝播のように境界が移動するような問題でも、成長したき裂の部分の境界を逐次付け加えるだけの手間で見逃しなく解析して行くことが出来ると考えられる。

本研究は、このような積分方程式解法の特性に注目して、種々な応力場にある初期クラックから発生する二次き裂の伝播を、積分方程式解法により解析したものである。

2. 積分方程式

弾性問題における外部力と境界値問題の積分方程式は、1重層ポテンシャルを導入することにより、次のように定式化される。

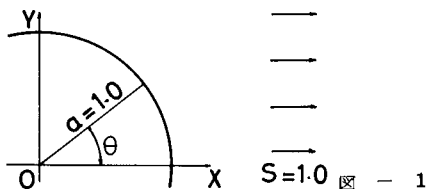
$$u_i(x) = \int_S \Gamma_{ij}^{(0)}(x; y) \cdot \varphi_{kj}(y) dS_j \quad x \in D, y \in S \quad (1) \quad \left| \frac{\partial}{\partial y_j} u_j(x) \right|_e = t_i(x) \quad x, y \in S \quad (2)$$

$$t_i(x) = -\frac{1}{2} \varphi_i(x) + \int_S \bar{\Gamma}_{ij}^{(0)}(x; y) \cdot \varphi_{kj}(y) dS_j \quad x, y \in S \quad (3)$$

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{(0)} = \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} + \mu \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda n_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (4)$$

ここに、 λ, μ は Lamé の定数、 $u_i(x)$ は x における変位、 $t_i(x)$ は境界上の表面力、 $\varphi_k(y)$ は境界上に分布する1重層ポテンシャル、そして $\Gamma_{ij}^{(0)}(x; y)$ は基本特異解を示し、 $\bar{\Gamma}_{ij}^{(0)}(x; y)$ は $\frac{\partial}{\partial y_j} \Gamma_{ij}^{(0)}(x; y)$ である。

今回使用したプログラムは、境界を円弧で近似し、密度の分布は2次関数で近似し、さらに1区間内に40点とるガウス積分を行なっている。このプログラムを一樣応力場に円孔が存在するという簡単な問題に適用した結果を示すと表-1、表-2 のようになる。ただし、変位は平面ひずみ状態におけるものであり、弾性係数を1.0、ポアソン比を0.2としている。これらの結果より、このプログラムは相当精度が良い事が分る。



3. き裂の伝播への適用

き裂の発生機構や進行方向に関して、これまでに種々の理論が提唱されているが、本数値解法ではそれらについて、次のような2つの仮定を設けた。

- i) き裂は引張応力によって発生するものとし、その引張応力の大きさがある基準値 σ_c を越えたと発生するものとする。
- ii) き裂が引張応力により発生することにより、

θ	$N = 18$	$N = 36$	Analytical
0°	-0.912	-1.000	-1.000
30°	0.024	0.003	0.000
45°		1.073	1.000
60°	2.135	1.994	2.000
90°	2.994	2.993	3.000

表 - 1

θ	$N = 18$	$N = 36$	Analytical
0° (x)	2.875	2.879	2.880
(y)	0.000	0.000	0.000
30° (x)	2.496	2.492	2.494
(y)	-0.479	-0.478	-0.480
45° (x)		2.033	2.036
(y)		-0.678	-0.679
60° (x)	1.437	1.438	1.440
(y)	-0.833	-0.830	-0.831
90° (x)	0.000	0.000	0.000
(y)	-0.962	-0.960	-0.960

表 - 2

その進行方向は引張応力の方向と直角とする。

このような仮定に基づき、き裂の伝播の追跡を行なうために次のような手続をとった。き裂先端の周辺に数個の点(以後検索点と呼ぶ)における引張応力を求め、その中で最大引張応力を示す点の値が基準値 α を越えたとき、その検索点の方向へ長さ Δ だけき裂が進行するとした。これをフローチャートに示すと図-2となる。

き裂のような問題を積分方程式解法で解く場合、問題となるのはその先端の形状の処理方法である。き裂の先端の曲率半径を ρ とした場合、実際には $\rho \neq 0$ であろうが、 $\rho = 0$ とすると積分方程式解法では解を得ることが困難であるので、ある曲率半径 ρ をもたせざるを得ない。

今回のシミュレートにおいては、き裂の形状を次のように決定した。き裂の先端近くまでは、ある幅 δ をもった平行な境界をそう入し、その先端に半径 ρ の円を付加することにした。き裂を進行させる場合には円を取り除き、新しい境界をそう入して、その先端に円を付加するものとする。

この方法で問題となるのは、1回の操作で進めるき裂の大きさ Δ 、き裂先端に付加する円の半径 ρ 、き裂の幅 δ 、検索点、さらに基準値 α というものをどのようにして決定するかということである。

4. シミュレーション・モデル

シミュレーション・モデルに使用した1例として、一様引張応力場に円孔が存在し、それよりき裂が伝播する場合をあげてみる。この場合、き裂が発生するのがA点ということがあらかじめ分かっているので、A点付近の分割を細かくして解の精度を上げるとともに、検索点もその周辺に配置をしている。この場合の例では、円の半径を a とすると $\Delta = 0.2a$ 、 $\rho = 0.01a$ 、 $\delta = 0.02a$ 、検索点とき裂の先端との距離を $0.001a$ としている。(図-3)

2つめの例としては圧縮応力場に45度方向に傾いた長短軸比が5.0の楕円き裂が存在する場合を解析した。この場合にはき裂の発生する部分分からないので、あらかじめ予想される付近の分割を細かくし、各区間の分れ目に検索点を配置し、その中で最大引張応力を示す検索点に対応する区間の分れ目より、仮定のii)に基づき境界に垂直に才1番目のき裂を発生させている。この場合、楕円の短径を a とすると $\Delta = 0.5a$ と $\Delta = 0.2a$ の2種について行ない、他の諸元は $\rho = 0.01a$ 、 $\delta = 0.02a$ 、検索点とき裂の先端との距離 $0.001a$ として同じである。

(図-4)

5. おわりに

この方法には、まだ疑問となる点が多くあり、改良の余地が数多くある。き裂の形状の処理方法を改良したものの結果については、当日学会で発表することにする。

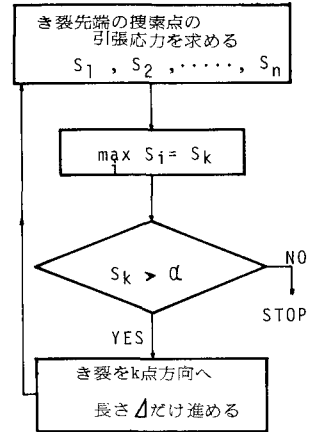


図 - 2

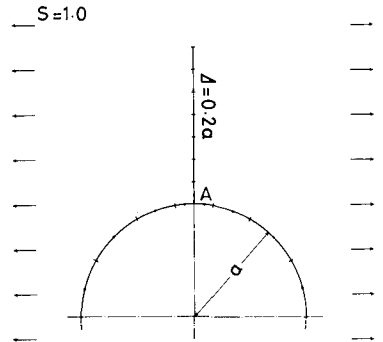


図 - 3

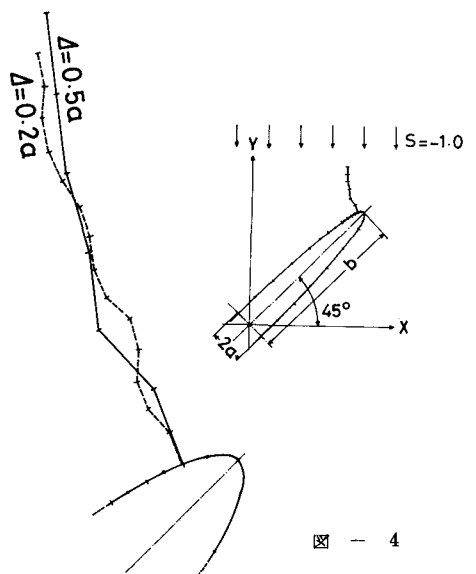


図 - 4