I-16　境界上の応力が一定となる空洞形状の解析

京都大学工学部　正員　○小林昭一
〃　大学院　学生員　西村直志
東京大学　〃　〃　松尾哲秀

1 はじめに

現在，地下発電所，原子炉地下設置などに係る大規模な地下構造物の建設が強く要請されており，技術的な面からは，強度的に最も優れた空洞形状を決定することが緊急の課題となってきた。この研究は，このような観点に立って，積分方程式法を用いて強度的に最良の空洞形状を決定する手法ならびに2,3の結果について述べたものである。本研究では，簡単のために，空洞周辺地盤を等方線形弾性体と理想化し，与えられた応力場において空洞壁面上の接線応力が一定値となるような形状を数値解析的に決定することを意図した。この種の問題に関しては，積分方程式法は極めて有効であることが判明した。

2 積分方程式による定式化

等方線形弾性論の基本方程式は，直交デカルト座標系では，変位 u_i について次のように与えられる。

$$\mathcal{L}\, u_i \equiv (\lambda+\mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,kk} = 0 \qquad (1)$$

ここに，λ, μ は Lamé の定数であり，コンマはそれに続く添字ごとの変数で偏微分を取ることを意味している。これに対応して，空洞の場合のようなある種の外部境界値問題は，一重層のポテンシャルを用いて次のように定式化される。

$$u_i(p) = \int_S \Gamma_i^{(k)}(p;q)\varphi_{(k)}(q)\,dS \,, \quad p\in D,\ q\in S \qquad (2)$$

$$t_i(p) = -\frac{1}{2}\varphi_i(p) + \int_S \Gamma_{Ii}^{(k)}(p;q)\varphi_{(k)}(q)\,dS \,, \quad p,q\in S \qquad (3)$$

$$t_i(p) = \left\{ T_{ij}^{n} u_j(p) \right\}_e \,, \quad p\in S, \qquad T_{ij}^{n} = \mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n} + \mu n_j\frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda n_i\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (4),(5)$$

$$\tau_{ij} = S_{ijk}u_k \equiv \lambda\delta_{ij}u_{k,k} + \mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \,, \quad \Gamma_{Ii}^{(k)}(p;q) \equiv T_{ij}^{n}\Gamma_j^{(k)}(p;q) \qquad (6),(7)$$

$$\mathcal{L}\,\Gamma_j^{(k)}(p;q) = -\delta(p-q)\,e_k \qquad (8)$$

ここに，t_i は表面力，τ_{ij} は応力，φ はポテンシャルの密度，δ_{ij} は Kronecker のデルタ，$\Gamma_j^{(k)}(p;q)$ は式(1)の基本解，T_{ij}^{n}, S_{ijk} は微分演算子である。また，$\{\ \}_e$ は外部境界への極限操作を意味し，e_k は k-方向への単位ベクトルを意味している。

積分方程式法は，式(3)を満す $\varphi_{(k)}(q)$ を求めることに帰着される。この $\varphi_{(k)}(q)$ が定まれば，これを式(2)に代入して変位が求められ，さらに式(6)より応力が求められることになる。数値計算では，境界 S を有限個の面，線（以下要素と呼ぶ）に分割し，各要素上の密度を適当に仮定するのが普通である。以下では，境界を多角形で近似し，各要素上では密度は一定とした。また，式(2),(3)の積分項に関しては，精度と計算速度とを向上させる目的で，積分は解析的に正確に行なった。なお，計算精度は，例えば一軸応力場内の円孔では，応力は0.1%程度の誤差であった（計算時間は約1秒）。

3 形状の決定方法

形状を決定するための解法の基本的な考え方は，空洞の境界を逐次的に修正して行って応力集中を減少させ，接線応力が境界点上の全ての点で一定となるまで修正し続けるという極めて単純なものである。

境界の修正方法はいろいろと考えられるが，ここでは次のようにした．まず，無次元パラメータ

$$\varepsilon_i = (\tau_k - \tau_i)/\tau_k \qquad (9)$$

を導入した．ここに，τは境界上の応力を示し，添字iは要素番号，kは基準となる要素番号である．このε_iを表現するような適当な移動作用素$\boldsymbol{D}$を導入すると，i番要素のガス節点の座標$\boldsymbol{x}_{l+1}$は，次式により座標$\bar{\boldsymbol{x}}_{l+1}$に移動する（簡単のために2次元問題を考えた）．

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{l+1} = (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{D})\,\boldsymbol{x}_{l+1} \quad , \quad \boldsymbol{1}: \text{単位テンソル} \qquad (10)$$

この座標$\bar{x}_{l+1}$を新しく節点として積分方程式を解く．この操作を繰り返して，境界節点の座標を逐次的に修正して行くと，次第に与えられた境界応力条件を満す形状に近づくことになる．

4 計算例

平面ひずみ状態と仮定し，与えられた応力場$\boldsymbol{\tau}$に対応して，境界上の接線応力が一定となる空洞形状の例を以下に示す．

(1) $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$, $a > 1.0$ (図-1)

(2) $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} bx_2 + 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$, $b > 0$ (図-2)

(3) $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} cx_2 + 2.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$, $c > 0$ (図-3)

(4) $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} dx_2 + 1.0 & 0 \\ 0 & 2.0 \end{bmatrix}$, $d > 0$ (図-4)

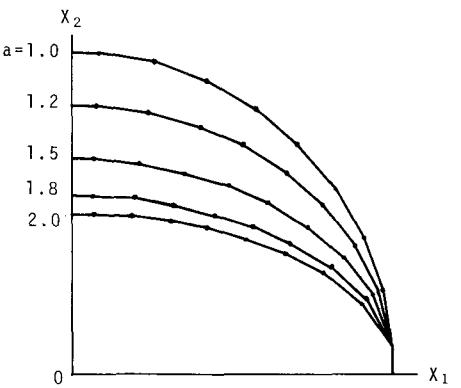

図-1

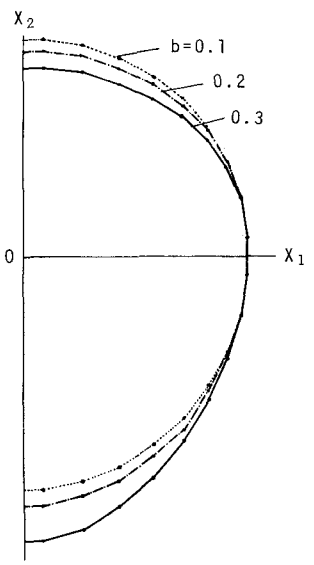

図-2

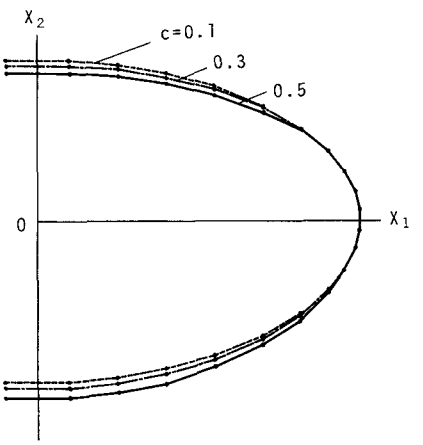

図-3

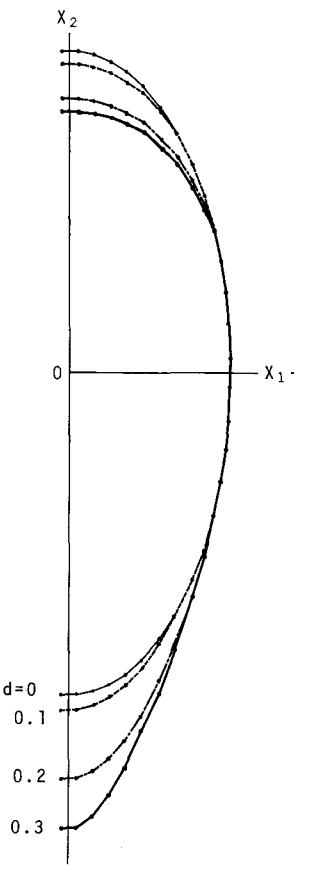

図-4