

京都大学大学院 学生員 ○北原道弘
 京都大学工学部 正員 丹羽義次
 京都大学工学部 正員 小林昭一

[1] はじめに 積分方程式法による固有値問題の解析は Helmholtz 方程式の固有値問題、弾性体の面内固有振動問題など筆者らにより進められており¹⁾、固有値を求める問題は複素平面上の極値問題として捉えられることが明らかにされている。ここでは、平板の固有振動問題に対する解析過程と一解析結果を報告する。この平板の固有振動問題において真の意味で厳密解が得られるのは四辺単純支持四角形板に対してのみであり、他の支持条件、境界形状に対しては変数分離可能系に対してでさえ何らかの数値的手法によるざるを得ない。古典的には、Rayleigh, Ritz, Galerkin などの名を冠する原理、解法などとその拡張はエネルギー法の一種であり、現在では変分境界値問題の近似解法として位置し、さらに有限要素法もこの変分原理に基づく一近似解法であり、収束性、誤差評価の問題と共に興味ある数値解法と思われる。本報告における積分方程式法もこの方面からの位置づけが可能であるが、本質的に異なる点は、前者におけるいかなる形状関数の選択と領域積分の問題、後者においては与えられた偏微分方程式の正解(基本解)と境界積分が対応する点である。この2点から多くの連続場から有次元の近似場への変換過程の相異、同じ意味であるが得られる固有値の個数の相異、また計算容量の相異が生じるが、数値計算上どの手法が有利であるかは一概には判断出来ず、これらの手法の有利な点を生かした融合法が開発されることが望ましいと考える。以下では積分方程式への変換と筆者らの提案した複素行列式による固有値の評価法が板問題に対しても有効にかつ十分に精度よく適用されることを数値実験により提示する。

[2] 場の方程式と境界条件

回転慣性、せん断力、ダンピングの影響を無視すれば、定常状態における薄板の横振動に対する基礎方程式と境界条件は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} (1) \quad & LU(x) = (\Delta^2 - \lambda^2)u(x) = 0 \quad x \in D, \quad \text{ここに } \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \\ (2) \quad & l_i u(x) = 0 \quad x \in \partial D \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega: \text{角振動数} \\ \eta: \text{単位面積当り質量} \\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{array} \right.$$

境界作用素を $T_i u(x) = \lim_{x \rightarrow \pm} u(x)$ と定義すると l_1, l_2 は次の4つの境界作用素のうち2つの異なる組み合わせを意味する。

$$(i) T_1(\cdot) \quad (ii) T_2(\cdot) \quad (iii) T_1(\Delta(\cdot) - (1-\nu)\partial_0^2(\cdot)) \quad (iv) T_2(\cdot) + (1-\nu)\partial_0 T_1(\cdot)$$

たとえば固定支持条件の場合は、 $l_1 = T_1(\cdot), l_2 = T_2(\cdot)$ となる。

[3] 基本解と積分方程式

次の偏微分方程式を満足する解 U を基本解と呼ぶ。 ($X, x, D, \partial D, D_+$ などについては Fig.1 参照)

$$LU(X) = (\Delta^2 - \lambda^2)U(X) = \delta_X \quad \delta: \text{Dirac measure}, \quad X \in D \cup \partial D \cup D_+$$

一意性を保証するために Sommerfeld の放射条件 $\lim_{r \rightarrow \infty} (rU - i\lambda U) = 0 (r^{\frac{1}{2}})$ を課す。この条件を満足する上記方程式の解は容易に次のように求まる。

$$U(X, Y; \lambda) = \frac{1}{8\pi^2} [H_0^{(1)}(\lambda r) - H_0^{(2)}(\lambda r)] \quad X, Y \in D \cup \partial D \cup D_+, \quad r = |X - Y|, \quad H_0^{(n)}(\lambda r): \text{第 } n \text{ 種 } 0 \text{ 次 Hankel 関数}$$

偏微分作用素 L の形式的共役の概念を求め解 U と基本解 U に適用し、さらに上に与えた4つの境界条件のうち異なる2つは常に満足されていることに注意すれば、次のように板問題に対する横変位の表示式 (Green の公式) が導かれる。

$$(3) \quad U(X) = \int_D U(X, y; \lambda) \mu_1(y) ds_y - \int_{\partial D} [\partial_{n_2} U(X, y; \lambda)] \mu_2(y) ds_y \quad X \in D \cup D_+ \quad y \in \partial D$$

固定、単純、自由支持をそれぞれの支持条件に応じ、2つの境界条件 $l_i (i=1, 2)$ と与えれば、次のように2つ

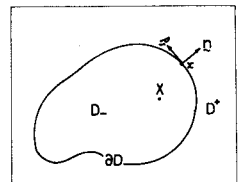


Fig.1 Plate Boundary, Normal Vector and Tangent Vector

の境界積分方程式を得る。

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} L[U(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} L[x] \left[\int_0^1 U(x, y; \lambda) \mu_1(y) dy - \int_0^1 \partial_y U(x, y; \lambda) \mu_2(y) dy \right] \quad (i=1, 2) \quad x \in D, \quad x_0 \in \partial D$$

この2つの積分方程式系に恒等的に零でない密度 μ_1, μ_2 が存在する時のパラメータ λ が求める固有振動数に対応する。

[4] 数値解析例 本手法によるこれまでの段階は与えられた問題の正確な固有値を記述している。残された問題は、得られた積分方程式系における積分を如何に正確に数値的に評価し、

いわゆる代数的な意味での一般固有値問題には帰着しない超越代数方程式において如何に固有値を特徴づけよかである。後者の問題は本質的には定常場に由来し、横変位の積分表示式(3)を参照すれば Hankel 関数の引数に固有パラメータが含まれていることから明らかとなる。この問題に対しては筆者により積分方程式法による固有値問題は複素平面上の極値問題として捉えることが出来ることと示されており、ここでは、板問題に対しこの手法を適用し本手法の持つ数値的特性を明らかにすると共に過去において得られた結果との比較を試みた。この目的のために固定支持(7)円形、(1)正方形板を選び数値解析を行なった。この問題(7)については Airey²⁾ により Bessel 関数の零点を stop by stop 法により求めた結果、問題(1)については Young³⁾ により梁の固有関数を用いて Ritz 法により求めた結果があり、本手法による結果との比較を以下に示す。2つの積分方程式(4)において境界を N 個に分割し、各分割数 N に対する固有パラメータ λ と複素行列式の値の絶対値 $|D|$ の関係を示したものが Fig. 2, Fig. 3 である。各図の下部にはそれぞれ Airey と Young の結果を示した。図には λ に対する $|D|$ の挙動を確認するために $N=28$ までの結果が示してあるが、固有値の位置を知るためには分割数 $N=16$ ほど十分であることがわかる。この場合パラメータの分割は $\Delta\lambda=0.1$ であるが Fig. 2 が示すように非常に近い固有値でもパラメータの分割を小さくすれば固有値をきくなく追跡していることがわかる。また図には $N=16$ まで固有値までの状況を示してあるが、さらに高次固有値とも境界分割数 $N=16$ において 2π さえもきくなく十分に正確に追跡していることが確認される。(これは Airey²⁾ の結果との比較の意味においてである) また Table. 1, Table. 2 には、 $N=28, \Delta\lambda=0.01$ における本手法の結果と Airey²⁾, Young³⁾ の結果のさらに詳しい比較がなされている。なお積分法には Gauss 8 分点積分法を用いたことを付記しておく。

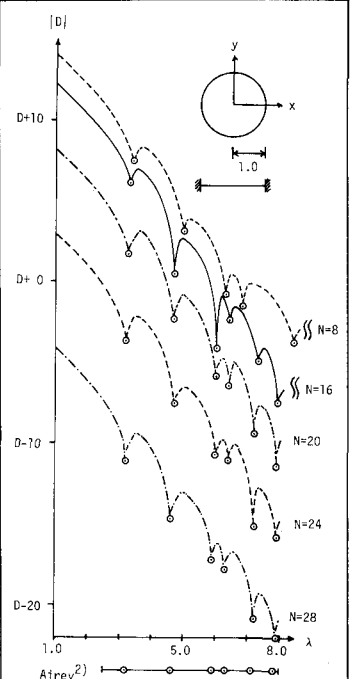


Fig. 2 Eigen Values of Clamped Circular Plate ($\Delta\lambda=0.1$)

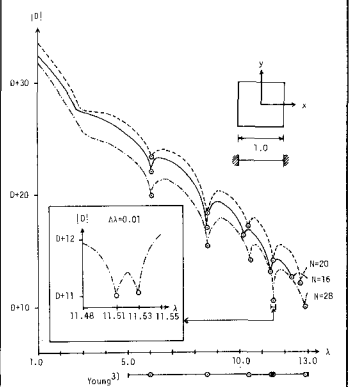


Fig. 3 Eigen Values of Clamped Square Plate ($\Delta\lambda=0.1$)

[5] おわりに

先に報告した結果¹⁾と本文における Fig. 1, 2 ; Table. 1, 2 の結果が示すようにある程度の数値積分の精度が保証される時、積分方程式法による固有値解析は、形状関数の選択、分割数などの概念による有効な手法であることがわかる。板問題に対する詳しい検討は当日報告する。

り 丹羽, 小林, 北原; 第32回年次学術講演会概要集 I-9 ; 土木学会論文報告集 (投稿中)

2) Airey, J.R.; Proceedings of the Physical Society, Vol. 23, pp. 225-232

3) Young, D.; J. of App. Mech., Vol. 17, No. 4, pp. 446-453, 1950

Table.1 Eigen Values of Clamped Circular Plate ($N=28, \Delta\lambda=0.01$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Airey, J.R. (2) ($\bar{\lambda}_j$)	3.1955	4.611	5.906	6.3064	7.144	7.799
Integral Eq. (λ_j)	3.21	4.64	5.94	6.34	7.18	7.84
$ \lambda_j - \bar{\lambda}_j / \bar{\lambda}_j \times 100 \%$	0.45	0.63	0.58	0.53	0.50	0.53

Table.2 Eigen Values of Clamped Square Plate ($N=28, \Delta\lambda=0.01$)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Young, D. (3) ($\bar{\lambda}_j$)	5.999	8.568	10.405	11.473	11.500	12.851
Integral Eq. (λ_j)	6.14	8.62	10.47	11.51	11.53	12.86
$ \lambda_j - \bar{\lambda}_j / \bar{\lambda}_j \times 100 \%$	2.53	0.61	0.62	0.32	0.26	0.07