

千代田化工建設(株) 正員 三頼達朗, 清水信行, 本間英知枝

1. まえがき 応答解析において時間に関する常微分方程式を各種差分法を用いて直接数値積分を行う方法が一般的である。一方、各時間区間に対して有限要素法¹⁾の概念を導入し、重みつき残差法(以後、M.W.R.と略す)を用いて漸化式を求める方法(時間域の有限要素化)が提案されている²⁾。又、時間に関する常微分方程式を解く際、exp関数にPadé関数を利用した近似法が提案されている³⁾。このように大別すると系の応答解析には差分法、時間域の有限要素化、関数近似法による数値積分法などが考えられる。ここではこれらの方法の相互関係を明らかにし、時間に関する一階の常微分方程式の合理的な解法を提案する。

2. 基礎方程式 ここでは時間に関する一階の常微分方程式で表わされる系として熱方程式を考える。熱方程式をマトリックス表示すれば式(1)のようになる。

$$[H]\{\dot{\theta}\} + [C]\{\theta\} + \{F\} = 0 \quad (1)$$

ただし、[H]:温度剛性マトリクス、[C]:蓄熱マトリクス

{\theta}:温度ベクトル、{F}:熱荷重ベクトル、 $\theta = \theta(x, t)$ (x :時間)

2.1 M.W.R.による数値積分法

ここに時点 n から、時点 $n+1$ までの{\theta}を式(2)で表わす²⁾

$$\{\theta\} = \{N_i \quad N_{i+1}\} \begin{Bmatrix} \{\theta\}_i \\ \{\theta\}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ただし、{\theta}_i:時点 n での温度分布、{\theta}_{i+1}={\theta}(i):既知形状関数 N_i , N_{i+1} は線形内挿関数

$$N_i = (\tau - \tau_i) / \tau, \quad N_{i+1} = \tau_i / \tau \quad (3)$$

ただし、 τ :時間きざみ

を用いる。ここで重み関数 w を時間に関する一次関数にとり、パラメータ a, b を含む一般形で $w = ap + b$

($p = \tau_i / \tau$)と表わし、式(1)に対する残差方程式を作れば

$$\int_0^1 (ap + b) \{H\} \{N_i \quad N_{i+1}\} \begin{Bmatrix} \{\theta\}_i \\ \{\theta\}_{i+1} \end{Bmatrix} + [C] \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \tau} \frac{\partial N_{i+1}}{\partial \tau} \right\} \begin{Bmatrix} \{\theta\}_i \\ \{\theta\}_{i+1} \end{Bmatrix} + \{F\} \tau dp = 0 \quad (4)$$

となる。これを整理すると式(5)のようになる。

$$\tau \frac{a/2 + b/2}{a/2 + b} \{H\} \{\theta\}_i + \tau \frac{a/3 + b/2}{a/2 + b} \{H\} \{\theta\}_{i+1} + [C] \{-\{\theta\}_i + \{\theta\}_{i+1}\} + \tau \int_0^1 \{F\} dp = 0 \quad (5)$$

なお、Zienkiewiczは重み関数 $w = N_{i+1}$ 即ち、 $a=1$, $b=0$ として数値積分を行っている。

2.2 一般化Padé近似式による数値積分法

時間に関する一階の線形常微分方程式(1)の一般解をexp関数に対する一般化Padé同次形一次近似式(以後、Padé近似法と略す)を用いて、 α, β をパラメータとして定式化すると式(6)のようになる。

$$* \left\{ [C] + \frac{\tau}{2} (1+r) [H] \right\} \{\theta\}_{i+1} = \left\{ [C] - \frac{\tau}{2} (1-r) [H] \right\} \{\theta\}_i + \frac{\tau}{2} \{ (1+r) \{F\}_{i+1} + (1-r) \{F\}_i \}$$

Table 1. Interpretations of various methods in terms of method of weighted residual and method of Padé approximation

various methods	Method of Weighted Residual a	b	Schematic Fig. of Weighting Func.	Method of Padé Approximation 1/\alpha	1/\beta
Euler Method	-3	2		0	1
Backward Euler Method	3	-1		1	0
Crank Nicolson Method	0	1/2		1/2	1/2
Zienkiewicz's Method by Method of Weighted Residual (W = N _i)	1	0		2/3	1/3
Generalized Crank Nicolson Method (gamma = 1/2)	3/2	-1/4		3/4	1/4

$$\frac{\tau}{2} [H] \{\theta\}_i + \frac{\tau}{2} [H] \{\theta\}_{i+1} + [C] \{-\{\theta\}_i + \{\theta\}_{i+1}\}$$

$$+ \tau \left\{ \frac{1}{2} \{F\}_i + \frac{1}{2} \{F\}_{i+1} \right\} = 0 \quad (6)$$

一方、Padé近似法において次式が成り立つことは時間域に関する限り、時間きざみ τ を小さくしていけば厳密解に一致することを保証するものである。

$$1/\alpha + 1/\beta = 1 \quad (7)$$

2.3 M.W.R.とPadé近似法の比較 式(5)と式(6)を比較することにより、M.W.R.のパラメータ a, b とPadé近似法のパラメータ α, β 間及び、熱荷重項間に次式の関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} (a/3 + b/2) / (a/2 + b) &= 1/\alpha \\ (a/6 + b/2) / (a/2 + b) &= 1/\beta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\int_0^1 \{F\} dp = \frac{1}{2} \{F\}_i + \frac{1}{2} \{F\}_{i+1} \quad (9)$$

これをもとにM.W.R.を用いたZienkiewiczの方法がPadé近似法の立場から解釈できる。一方、各種差分法、即ちEuler法、Backward Euler法、Crank Nicolson法、一般化Crank Nicolson法($r=1/2$)*⁴⁾などはM.W.R.、Padé近似法の

パラメータを適当に選ぶことによって M.W.R., Padé 近似法に対応づけられた。各解法の関係をパラメータ a, b, α, β の関係としてまとめると Table 1 の様になる。ここで重み関数のパラメータ a, b は式(5)が成立する為、 $\frac{a}{2} + b \neq 0$ という条件を満たしていなければならない。パラメータ a, b は重みを決定するだけであるので前述の条件下で任意の値をとって良い。ここでは $\frac{a}{2} + b = \frac{1}{2}$ とした。一方、式(8)より、式(7)が成立することがわかる。従って、重み関数 $w = ap + b$ を用いる場合、時間域に関する限り、時間ぎざみ τ を小さくしていけば厳密解に一致することが保証されている。

3. 各種解法の特長評価

各種解法の複素平面のゆがみを Fig. 1 から、Fig. 5 に示す³⁾。なお、熱方程式の固有値の厳密解は複素平面の負の実軸上に存在し、近似解は負の実軸近傍に存在することを考慮すればこれらの図で負の実軸近傍のゆがみ特性に注目すれば良い。即ち、負の実軸上で厳密解 $\omega\tau$ と近似解 $\bar{\omega}\tau$ の偏差が小さい程、精度が良い。これを各種解法に関して $\bar{\omega}\tau/\omega\tau$ 比を $\omega\tau$ に対して示す。(Fig. 6 参照) 可能な限り、広い範囲(ある例題(ω : 既知)の時 τ を大きくとれ、 τ が既知の時 ω を大きく(即ち、高次モードまで考慮)とれる)で $\pm 10\%$ の誤差範囲におさまる α, β を求めると

$1/\alpha = 0.68, 1/\beta = 0.32$ となる。このパラメータ値をとる解法 (Fig. 7 参照) を熱方程式の様な時間に関する一階の常微分方程式の解法として提案する。ス。Fig. 6 の結果から、M.W.R. を用いた Zienkiewicz の方法は $1/\alpha = 2/3, 1/\beta = 1/3$ であり、提案したパラメータ値に近く、他の差分法に比してより合理的であることが明らかになった。

4. あとがき

本論文では熱方程式を例にとり、時間に関する一階の常微分方程式を数値積分する際、問題となる解法選定の規準として解法に含まれるパラメータを用いて差分法 M.W.R., Padé 近似法の関連づけを行った。更に前述した評価方法により、時間に関する一階の常微分方程式の合理的な決定法を示した。

参考文献

- 1) 戸川、微分方程式の数値計算、オーム社
- 2) Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science (1971) McGraw-Hill
- 3) 清水・渡辺・堀田・藤田・山本 機械学会論文集 43-368 (昭 52-4)
- 4) 機械学会非弾性構造解析プログラムの調査と試用 (1974)

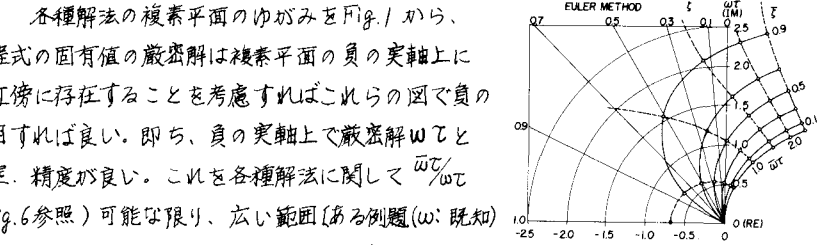


Fig. 1 ST-plane distortion for Padé approximation when ($1/a=0, 1/b=1$)

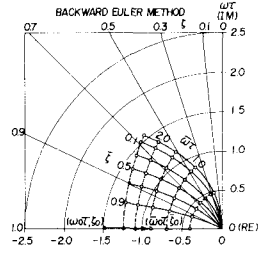


Fig. 2 ST-plane distortion for Padé approximation when ($1/a=1, 1/b=0$)

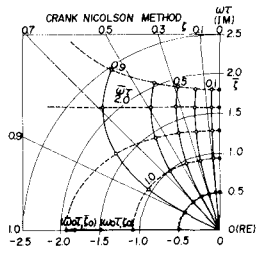


Fig. 3 ST-plane distortion for Padé approximation when ($1/a=1/2, 1/b=1/2$)

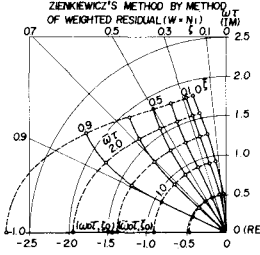


Fig. 4 ST-plane distortion for Padé approximation when ($1/a=2/3, 1/b=1/3$)

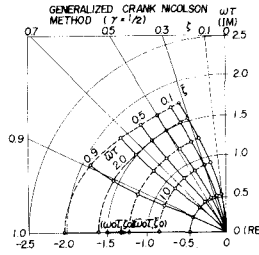


Fig. 5 ST-plane distortion for Padé approximation when ($1/a=3/4, 1/b=1/4$)

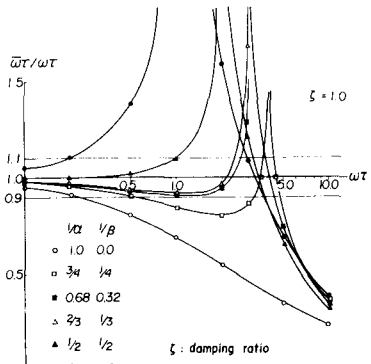


Fig. 6 Characteristics of Padé approximation

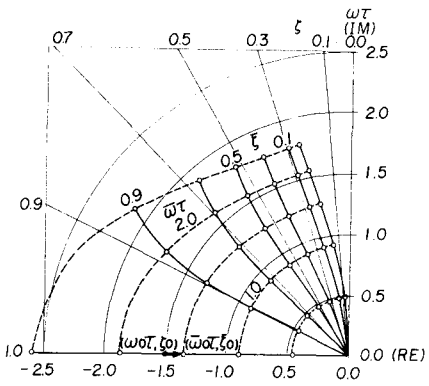


Fig. 7 ST-plane distortion for Padé approximation when ($1/a=0.68, 1/b=0.32$)