I-13　熱伝導型方程式の積分法とそれに基づく運動方程式の解法

東京工業大学　学生員　藤原　亨
東京工業大学　正　員　吉田　裕
東京工業大学　正　員　増田陳紀

1．はじめに

熱伝導型の方程式に代表される1階の連立常微分方程式の時間積分について、有限要素技法に基づいた新たな時間積分法を提案し、昨年の年次講演会でも発表した。ここでは2階の方程式である運動方程式を1階の熱伝導型の方程式に変換することにより得られる新たな運動方程式の解法のアルゴリズムを提案し、その特性について考察する。

2．基礎方程式と有限要素技法による定式化

ここで対象とするのは式(1)に示すような1階の連立線形常微分方程式である。

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\,x^{(1)} + \beta\,x = \bar{f} \\ &x\,|_{t=0} = x_0 \qquad x^{(1)} = \frac{d}{dt}x \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

なお、α，β は対称行列であるとする。

本積分法の基本的な考え方は、新たに変数 φ を式(2)のように導入し、これを式(1)に代入して得られる式(3)を

$$x = \alpha^{-1}(-\alpha\,\varphi^{(1)} + \beta\,\varphi) \qquad (2)$$

$$-\alpha\,\varphi^{(2)} + \beta\,\alpha^{-1}\beta\,\varphi - \bar{f} = 0 \qquad (3)$$

基礎方程式とし、対象時間領域内でこれと等価な変分汎関数に基づき有限要素技法を用いて、時間領域を分割した各時間要素に関するマトリックス式：式(4)を導くことであるが、その過程については昨年の概要集に示したところでもありここでは省略させていただく。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_i \\ F_{i+1} \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

ここで i, $i+1$ は時間要素の節点を表わし、左辺の係数行列の部分マトリックス K_{ij} は α，β および時間要素の時間間隔 Δt により次のように計算される。

$$\left.\begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{3}\beta\alpha^{-1}\beta\cdot\Delta t + \beta + \alpha\cdot\frac{1}{\Delta t} \\ K_{12} &= \frac{1}{6}\beta\alpha^{-1}\beta\cdot\Delta t - \alpha\cdot\frac{1}{\Delta t} = K_{21} \\ K_{22} &= \frac{1}{3}\beta\alpha^{-1}\beta\cdot\Delta t - \beta + \alpha\cdot\frac{1}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

また右辺のベクトル F は変数 x で式(6)のように表わせるもので、自然変数とよぶ。

$$F = -\alpha\,x \qquad (6)$$

3．運動方程式の変換

有限自由度に理想化された系の運動方程式は式(7)のように、2階の常微分方程式で与えられる。

$$M\,v^{(2)} + C\,v^{(1)} + K\,v = \bar{P} \qquad (7)$$

ここに M, C, K は各々質量，減衰，剛性行列で、v は変位ベクトル、$\bar{P}$ は外力のベクトルである。

式(7)に対し、ここでは次のような変換を行う。

$$\left[\begin{array}{c:c} (C-M-K)^{-1} & 0 \\ \hdashline 0 & M \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x_1^{(1)} \\ \hdashline x_2^{(1)} \end{array}\right\} + \left[\begin{array}{c:c} (C-M-K)^{-1} & I \\ \hdashline I & C-M \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} x_1 \\ \hdashline x_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \bar{P}^* \\ \hdashline 0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

ここで
$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= v \qquad\qquad\qquad I：単位行列 \\ x_1 &= -M\,v^{(1)} - (C-M)\,v \qquad\qquad (9) \\ \bar{P}^* &= -(C-M-K)^{-1}\,\bar{P} \end{aligned}\right.$$

とすれば式(8)は式(7)の運動方程式と等価である。

式(8)の係数行列は対称行列であり、$x^T = \langle x_1^T\ x_2^T \rangle$ として式(8)を改めて式(10)のように書く。

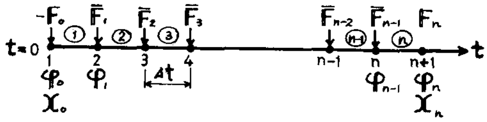
$$\alpha\,x^{(1)} + \beta\,x = \bar{f} \qquad (10)$$

このようにして変換した式(10)は式(1)と同形となる。

4．時間積分のアルゴリズム

各時間要素の時間間隔を一定とすれば、式(4)に示すマトリックス式を時間領域の始端から n 個の要素について重ね合わせると次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & & \\ K_{21} & K_{22}+K_{11} & K_{12} & & 0 \\ & K_{21} & K_{22}+K_{11} & K_{12} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & K_{21} & K_{22}+K_{11} & K_{12} \\ & & & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_0 \\ \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \vdots \\ \bar{F}_{n-1} \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (11)$$



ここでベクトル $\bar{F}_i$（$i=1\sim n-1$）は各時間節点における、等価節点外力ベクトルである。$\varphi_n = 0$ とすれば、式(11)で次に示すように逐次 φ を消去することにより未知変数 F_n が求まる。すなわち、新たに係数行列 H を次のように導入すると、

$$\mathbb{H}_1 = \mathbb{K}_{21}^{-1}, \quad \mathbb{H}_2 = -\mathbb{K}_{21}^{-1}(\mathbb{K}_{11}+\mathbb{K}_{22})\mathbb{K}_{21}^{-1} \qquad (12),(13)$$

$$\mathbb{H}_i = -\mathbb{K}_{21}^{-1}(\mathbb{K}_{11}+\mathbb{K}_{22})\mathbb{H}_{i-1} - \mathbb{H}_{i-2} \quad (i=3,4,\cdots,n) \qquad (14)$$

これより変数$\boldsymbol{\varphi}$が次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}_{n-1} &= \mathbb{H}_1\mathbb{F}_n \\
\boldsymbol{\varphi}_{n-2} &= \mathbb{H}_1\bar{\mathbb{F}}_{n-1} + \mathbb{H}_2\mathbb{F}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\varphi}_{n-i} &= \mathbb{H}_1\bar{\mathbb{F}}_{n-i+1} + \mathbb{H}_2\bar{\mathbb{F}}_{n-i+2} + \cdots + \mathbb{H}_i\mathbb{F}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\varphi}_1 &= \mathbb{H}_1\bar{\mathbb{F}}_2 + \mathbb{H}_2\bar{\mathbb{F}}_3 + \cdots\cdots + \mathbb{H}_{n-1}\mathbb{F}_n \\
\boldsymbol{\varphi}_0 &= \mathbb{H}_1\bar{\mathbb{F}}_1 + \mathbb{H}_2\bar{\mathbb{F}}_2 + \cdots\cdots + \mathbb{H}_{n-1}\bar{\mathbb{F}}_{n-1} + \mathbb{H}_n\mathbb{F}_n
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

一方式(11)の第1式から

$$\mathbb{K}_{11}\boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbb{K}_{12}\boldsymbol{\varphi}_1 = -\bar{\mathbb{F}}_0 \qquad (16)$$

であるから、式(15),(16)より次式を得る。

$$(\mathbb{K}_{11}\mathbb{H}_n + \mathbb{K}_{12}\mathbb{H}_{n-1})\mathbb{F}_n = -\bar{\mathbb{F}}_0 - \mathbb{K}_{11}(\mathbb{H}_1\bar{\mathbb{F}}_1 + \mathbb{H}_2\bar{\mathbb{F}}_2 + \cdots + \mathbb{H}_{n-1}\bar{\mathbb{F}}_{n-1})$$
$$- \mathbb{K}_{12}(\mathbb{H}_1\bar{\mathbb{F}}_2 + \mathbb{H}_2\bar{\mathbb{F}}_3 + \cdots + \mathbb{H}_{n-2}\bar{\mathbb{F}}_{n-1}) \qquad (17)$$

式(17)の右辺は既知であるからこの連立方程式を解くことにより終端における$\mathbb{F}_n$が求まる。求まった$\mathbb{F}_n$に対し外力の影響を考慮すれば式(6)より$\mathbb{X}_n$が求まり、また式(9)から対応する変位，速度が求まる。式(17)は任意の要素数で立てられるから要素数を1,2,3,…とした各場合について式(17)を解けば節点変数が逐次求まる。係数行列$\mathbb{H}$は式(14)より計算の過程で求めていけばよい。

5．本積分法の特性について

減衰のない1自由度系の振動を考えると式(17)は次式

$$(\mathbb{K}_{11}\mathbb{H}_n + \mathbb{K}_{12}\mathbb{H}_{n-1})\mathbb{F}_n = -\bar{\mathbb{F}}_0 \qquad (18)$$

のようになる。$\mathbb{K}_{ij}$, $\mathbb{H}_i$ は2×2のマトリックスである。式(6)と式(18)から変数$\mathbb{X}$について次式を得る。

$$\mathbb{X}_n = -\boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbb{K}_{11}\mathbb{H}_n + \mathbb{K}_{12}\mathbb{H}_{n-1})^{-1}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbb{X}_0 \qquad (19)$$

式(19)に示す$\mathbb{X}_n$と$\mathbb{X}_0$の関係式における係数行列の固有値解析を行うことにより、本積分法の特性を振幅および周期の伸びについて検討した。

Fig. 1~3 は横軸に系の固有円振動数ωと時間要素の時間間隔Δtとの積$\omega\Delta t$をとり、縦軸に式(19)の係数行列の固有値の絶対値$|\lambda^*|$をとったものである。図を見てもわかるように固有値λ^*は常に複素数となりその絶対値は1を超えることはない。このことは本方法が$\omega\Delta t$によらず常に振動する解を与えかつ無条件安定であることを示している。また Fig. 4~6は系の固有周期Tと近似の周期T*との比T/T* を縦軸にとったものである。なお、図中に示す要素数は式(18)を作るのに用いた要素数，すなわちnを意味する。

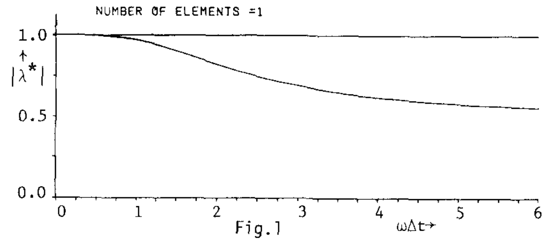


Fig.1

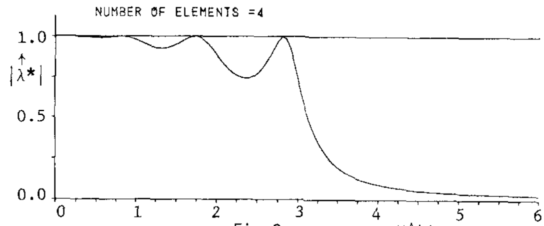


Fig.2

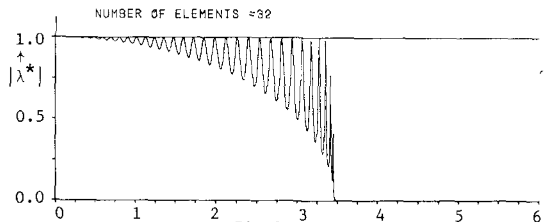


Fig.3

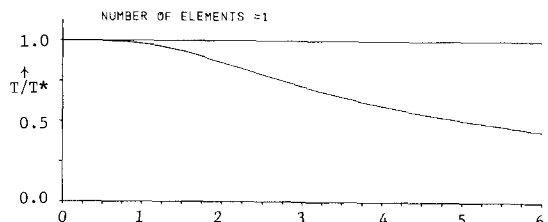


Fig.4

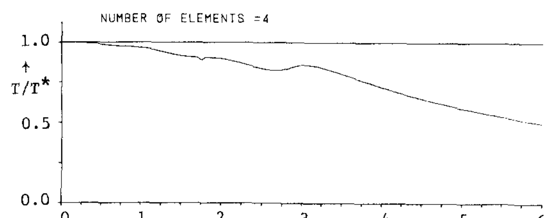


Fig.5

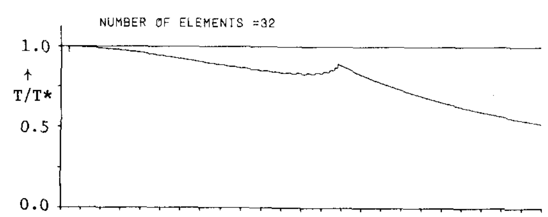


Fig.6