

大阪市立大学 正員 堀川都志雄

大阪市立大学 正員 園田恵一郎

1. はしがき; Transversely isotropic 材料からなる三次元弾性体の解析は、① S.G. Lekhnitskyによる重調和関数を用いるもの、② H.A. Elliotらによる調和関数を用いるものに大別される。著者は transversely isotropic body の一般解を得るために重調和関数 F に調和関数 φ を重ね合わせる方法を提案し、さらに、この方法を用いて鉛直方向の弾性係数のみが異なる直交異方性厚板の解析を行った。¹⁾

本研究は、水平面内において直交異方性を示す板が層状に配置されている積層板の上下面に表面力が作用し、かつ板内において物体力が作用する場合の直交異方性積層板の解を上述の関数 F および φ を適用することにより求めたものである。

2. 理論式; 板の中央面内に x - y 軸をとり、その面に垂直に z 軸をとる。以下の理論においては、 x 軸方向のラメの定数のみが異なるものとする。

・Hooke の法則:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_x + (\lambda+2\mu)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (\lambda+2\mu)\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

・変位の釣合式:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{B}_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{B}_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2})u + \bar{B}_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \bar{B}_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + X &= 0 \\ \bar{B}_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\bar{B}_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{B}_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{B}_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2})v + \bar{B}_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + Y &= 0 \\ \bar{B}_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \bar{B}_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + (\bar{B}_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{B}_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{B}_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2})w + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

・変位関数 F_x, φ_x と変位 u, v, w の関係式:

$$\left. \begin{aligned} (R_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(S_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})F_x &= -\frac{\bar{B}_2}{B_1 \bar{B}_3} X \\ (T_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\varphi_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$u = \frac{B_1}{\bar{B}_2} \left(\frac{\bar{B}_3}{B_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_x, \quad v = -\frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial^2 F_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \quad (4)$$

$$\text{ここで, } 2R_x = a_x + \sqrt{a_x^2 - 4b_x}, \quad 2S_x = a_x - \sqrt{a_x^2 - 4b_x}, \quad T_x = \bar{B}_3 / B_2,$$

$$a_x = (B_1 \bar{B}_1 + \bar{B}_2^2 - \bar{B}_2^2) / (B_1 \bar{B}_3), \quad b_x = \bar{B}_1 / B_1,$$

$$B_1 = \lambda + 2\mu, \quad \bar{B}_1 = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}, \quad B_2 = \lambda + \mu, \quad \bar{B}_2 = \bar{\lambda} + \bar{\mu}, \quad B_3 = \mu, \quad \bar{B}_3 = \bar{\mu},$$

$$X, Y, Z: x, y, z \text{ 軸方向の body-force}$$

全周単純支持された直交異方性厚板の一般解は、a) 特解 p と b) 同次解 h の重ね合せによって得られ、 x - y 方向に三角級数で、 z 方向に双曲線関数で表わせば、それぞれ次のようになる。ただし、body-force は板厚に關して一定とする。

$$\left. \begin{aligned} \text{a) 特解: } 2\bar{B}_3 u^p &= \sum_m \sum_n (\bar{X} b_{x1} + \bar{Y} b_{x2}) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, & 2\bar{B}_3 v^p &= \sum_m \sum_n (\bar{X} b_{y1} + \bar{Y} b_{y2}) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\ 2\bar{B}_3 w^p &= \sum_m \sum_n \bar{Z} b_{z1} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{ここで, } \alpha_m = m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b, \quad b_{x1} = (\bar{B}_3 \alpha_m^2 + B_1 \beta_n^2)(\bar{B}_3 \alpha_m^2 + B_3 \beta_n^2) / \delta^p, \quad b_{x2} = -\bar{B}_2 \alpha_m \beta_n (\bar{B}_3 \alpha_m^2 + B_3 \beta_n^2) / \delta^p,$$

$$b_{y1} = -\bar{B}_2 \alpha_m \beta_n (\bar{B}_3 \alpha_m^2 + B_3 \beta_n^2) / \delta^p, \quad b_{y2} = (\bar{B}_1 \alpha_m^2 + \bar{B}_3 \beta_n^2)(\bar{B}_3 \alpha_m^2 + B_3 \beta_n^2) / \delta^p,$$

$$b_{z1} = \{(\bar{B}_3 \alpha_m^2 + \bar{B}_3 \beta_n^2)(\bar{B}_3 \alpha_m^2 + B_1 \beta_n^2) - \bar{B}_2^2 \alpha_m^2 \beta_n^2\} / \delta^p, \quad \delta^p = (\bar{B}_3 \alpha_m^2 + B_3 \beta_n^2) \{ \bar{B}_1 \bar{B}_3 \alpha_m^4 + (B_1 \bar{B}_1 + \bar{B}_2^2 - \bar{B}_2^2) \alpha_m^2 \beta_n^2 + B_1 \bar{B}_3 \beta_n^4 \},$$

$$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}: \text{body-force } X, Y, Z \text{ のフーリエ係数.}$$

b) 同次解: 式(3)の F_x, φ_x は、根号内 $(=a_x^2 - 4b_x)$ の符号に対応して次のような関数で表わされる。

I) $a_x^2 - 4b_x > 0$

$$\left. \begin{aligned} F_x^I &= \sum_m \sum_n [C_1^I \operatorname{ch} \lambda_1 z + C_2^I \operatorname{sh} \lambda_1 z + C_3^I \operatorname{ch} \lambda_2 z + C_4^I \operatorname{sh} \lambda_2 z] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \varphi_x^I &= \sum_m \sum_n [C_5^I \operatorname{ch} \lambda_1 z + C_6^I \operatorname{sh} \lambda_1 z] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{II) } a_x^2 - 4b_x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} F_x^{\text{II}} &= \sum_m \sum_n \left[(C_1^{\text{II}} \text{ch} \lambda_{1j} + C_2^{\text{II}} \text{sh} \lambda_{1j} + \lambda_{1j} (C_3^{\text{II}} \text{ch} \lambda_{1j} + C_4^{\text{II}} \text{sh} \lambda_{1j})) \right] \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \varphi_x^{\text{II}} &= \sum_m \sum_n \left[(C_5^{\text{II}} \text{ch} \lambda_{1j} + C_6^{\text{II}} \text{sh} \lambda_{1j}) \right] \sin \alpha_m x \cos \beta_n y. \end{aligned} \right\} \text{--- (7)}$$

$$\text{III) } a_x^2 - 4b_x < 0$$

$$\left. \begin{aligned} F_x^{\text{III}} &= \sum_m \sum_n \left\{ (C_1^{\text{III}} \text{ch} \lambda_{1j} + C_2^{\text{III}} \text{sh} \lambda_{1j}) \sin \eta_{1j} + (C_3^{\text{III}} \text{ch} \lambda_{1j} + C_4^{\text{III}} \text{sh} \lambda_{1j}) \cos \eta_{1j} \right\} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ \varphi_x^{\text{III}} &= \sum_m \sum_n \left[(C_5^{\text{III}} \text{ch} \lambda_{1j} + C_6^{\text{III}} \text{sh} \lambda_{1j}) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \right]. \end{aligned} \right\} \text{--- (8)}$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \eta_i$ ：式(3)中の β に関する根である。 $\text{ch} \lambda_{1j} = \cosh \lambda_{1j}$ ， $\text{sh} \lambda_{1j} = \sinh \lambda_{1j}$ ，未定数 $C_1^{\text{I}}, C_1^{\text{II}}, \dots, C_6^{\text{II}}, C_6^{\text{III}}$ は、板の上・下面の境界条件より求められる。

3. 積層板の解析；

図-1に示されるような積層板の*i*番目の接合面に作用する不静定力を P_x^i, P_y^i, P_z^i とすれば、変位の連続条件により次のようなマトリックスを得る。

$$\begin{bmatrix} B^i, C^i & & & \\ A^i, B^i, C^i & & & \\ & A^i, B^i, C^i & & \\ & & A^{i+1}, B^{i+1} & \\ & & & P^{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^i \\ P^i \\ P^i \\ P^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}^i \\ D^i \\ D^i \\ \bar{D}^{i+1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

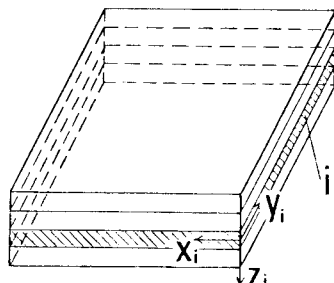


図-1

ここで、 $P^i = (P_x^i, P_y^i, P_z^i)^T$ ， A^i, B^i, C^i, D^i ：式(6)~(8)の未定定数を各層の板の上・下面の境界条件より決定し、それらを式(4)，(5)に代入して、*i*番目の板の上・下面における変位 u^i, v^i, w^i を求め、さらに接合面における変位をそれぞれ連続させることによって得られる。 $\bar{D}^i, \bar{D}^{i+1}$ ：積層板の上・下面の境界条件を考慮することによって D^i, D^{i+1} を変形したもの。

4. 数値計算例； 図-2に示されるような上層板が等方性で、下層板が直交異方性材料からなる2層の板の中央部に部分荷重が作用している場合の荷重点近傍の厚さ方向に関する応力分布状態を図-3に示す。

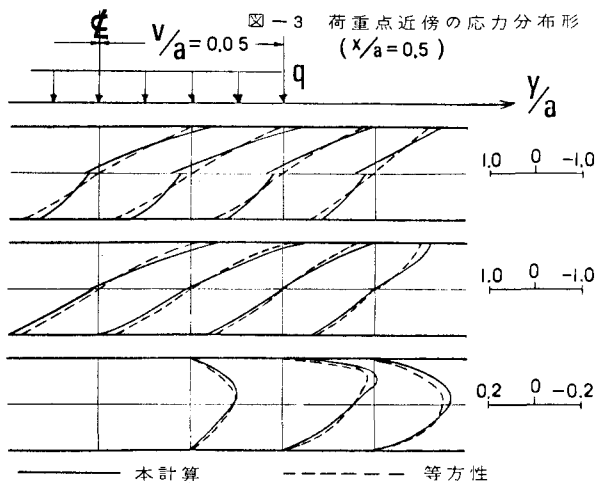
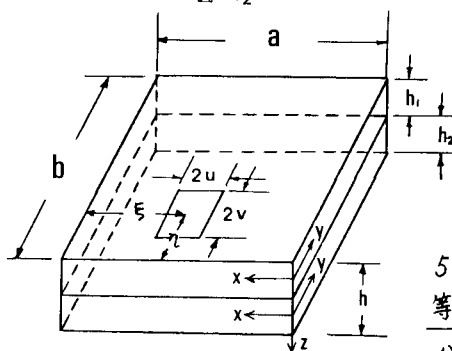
$$b/a = 1.0, h_1/a = h_2/a = 0.05$$

$$\xi/a = \eta/a = 0.5$$

$$u/a = v/a = 0.05$$

	E_x	ν_x	$E_y = E_z$	$\nu_y = \nu_z$
上層板	1.0	0.3	1.0	0.3
下層板	0.5	0.3	1.0	0.3

図-2



5. あとがき； 荷重点近傍の応力は複雑な分布状態を示しており、等方性の板に比べてかなり異っている。

1) 昭和52年度 関西支部