

北見工業大学 正員 奥村 勇
北海道大学 正員 芳村 仁

1. まえがき 非軸対称荷重を受ける中実球, 球があるいは厚肉球殻についての一般的解析方法は, 現在のところまだ見当らないようである。本報告は, 拡張された Boussinesq の解に基づき, 球あるいは球殻の非軸対称問題の解法について述べ, 厚肉半球殻が風荷重を受けの場合についての数値計算を行い, 従来の薄肉殻理論による解析結果と3次元解析による結果とを比較するものである。解法の特徴は, 境界条件によつては, 軸対称問題と同様に厳密解が得られること, および, 軸対称問題の解が非軸対称問題の解の特別な場合として導出されることである。

2. 基本解および変位ポテンシャル 基本解として, Newber の解に Boussinesq の第2基本解を加えた解に形式的に等価な

$$2G u = \text{grad}(\phi + F\lambda) - 4(1-\nu)\lambda + 2\text{rot}\psi \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここで } u &= (u_r, u_\theta, u_\varphi), \quad F = (r, 0, 0), \quad \lambda = (\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\varphi), \\ \psi &= (\psi_r, \psi_\theta, 0), \quad \psi_\theta = -\tan\theta \cdot \psi_r, \quad r^2\phi = 0, \quad r^2\lambda = 0, \\ r^2\psi_r + \frac{2}{r^2\cos^2\theta}\psi_r + \frac{2\tan\theta}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

を用いる。式(2)の後から第1, 第2および第3式より変位ポテンシャルを求め, 変位ポテンシャルの独立性を検討し, 独立でない項をはずすと, 内部問題については, 次のような変位ポテンシャルが得られる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi A_{nm} P_n^m(\mu), \quad \lambda_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi \cdot n E_n P_{n-1}^m(\mu), \\ \lambda_\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi E_n \sin\theta \frac{dP_{n-1}^m(\mu)}{d\mu}, \quad \lambda_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \sin m\varphi E_n \frac{m P_{n-1}^m(\mu)}{\sin\theta}, \\ \psi_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \sin m\varphi U_{nm} \cos\theta P_n^m(\mu), \quad \psi_\theta = -\tan\theta \cdot \psi_r \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで, $P_n^m(\mu)$ は次数 n , 位数 m の Legendre 陪関数であり, $\mu = \cos\theta$ である。外部問題の変位ポテンシャルは, 上式の n に $-n-1$ を代入して得られる。また, 軸対称問題の変位ポテンシャルは, 上式において, $m=0$ を代入して次式となる。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} r^n A_n P_n(\mu), \quad \lambda_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot n E_n P_{n-1}(\mu), \quad \lambda_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} r^n E_n \sin\theta P_{n-1}'(\mu) \quad \dots\dots\dots (4)$$

変位成分を Boussinesq にしたがって, 第1, 第2 および第3基本解として三つに分けて記すと次式となる。

$$\text{第1基本解: } 2G u_r' = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad 2G u_\theta' = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \quad 2G u_\varphi' = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{第2基本解: } 2G u_r^2 = -\frac{2}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi}, \quad 2G u_\theta^2 = \frac{2}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi_r}{\partial\varphi}, \quad 2G u_\varphi^2 = \frac{2}{r} \left\{ \frac{\partial(r\psi_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} \right\} \quad \dots\dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{第3基本解: } 2G u_r^3 &= \frac{\partial}{\partial r} (r\lambda_r) - 4(1-\nu)\lambda_r, \quad 2G u_\theta^3 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} (r\lambda_r) - 4(1-\nu)\lambda_\theta, \\ 2G u_\varphi^3 &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (r\lambda_r) - 4(1-\nu)\lambda_\varphi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

求める変位成分は, 式(5)から式(7)の三つの基本解をそれぞれ加えたものである。

3. 応力成分 球座標系における応力とひずみの関係式を用いて応力成分を求めると, たとえば, σ_r , $\tau_{r\theta}$ および $\tau_{r\varphi}$ については次式となる。第3基本解の応力成分は $n \rightarrow n+1$ として, 次数を上げ次式を示す。

$$\sigma_r' = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \cos m\varphi A_{nm} \cdot n(n-1) P_n^m(\mu), \quad \left. \begin{aligned} \tau_{r\theta}' &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \sin m\varphi A_{nm} \cdot n(n-1) P_n^m(\mu), \\ \tau_{r\varphi}' &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \cos m\varphi A_{nm} \cdot n(n-1) P_n^m(\mu), \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \cos m\varphi A_{nm} (-1/2)(n-1) \{ P_n^{m+1}(\mu) - (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(\mu) \}, \\ \tau_{r\varphi} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \sin m\varphi A_{nm} (-1/2)(n-1) \{ P_n^{m+1}(\mu) + (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(\mu) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \cos m\varphi (n-1) \cdot 2m U_{nm} P_n^m(\mu), \\ \tau_{r\theta}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \cos m\varphi (1/2) U_{nm} \{ (n-m-2) P_n^{m+1}(\mu) + (n+m)(n-m+1)(n-m-2) P_n^{m-1}(\mu) \}, \\ \tau_{r\varphi}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{n-2} \sin m\varphi (1/2) U_{nm} \{ (n-m-2) P_n^{m+1}(\mu) - (n+m)(n-m+1)(n-m-2) P_n^{m-1}(\mu) \}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi (n+1)(n^2-n-2-2\nu) E_{nm} P_n^m(\mu) \\ &\quad - 2(1+\nu) E_{00}, \\ \tau_{r\theta}^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \cos m\varphi (-1/2)(n^2+2n-1+2\nu) E_{nm} \{ P_n^{m+1}(\mu) \\ &\quad - (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(\mu) \}, \\ \tau_{r\varphi}^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n \sin m\varphi (-1/2)(n^2+2n-1+2\nu) E_{nm} \{ P_n^{m+1}(\mu) \\ &\quad + (n+m)(n-m+1) P_n^{m-1}(\mu) \} \end{aligned} \quad (10)$$

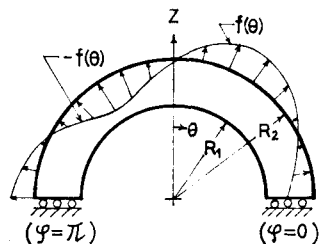


図-1 厚肉半球殻

軸対称問題の応力成分は、式(8)から式(10)において、 $m=0$ を代入し、また、外部問題の応力成分は、 $n \leftarrow -n-1$ を代入して得られる。

4. 応用例 内半径 R_1 および外半径 R_2 の厚肉球殻が $r=R_1$ において

$$\begin{aligned} \sigma_r &= a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n a_{nm} \cos m\varphi \cdot P_n^m(\mu), \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n0} P_n^1(\mu), \quad \tau_{r\varphi} = 0 \end{aligned}$$

$r=R_2$ において

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} P_n(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n c_{nm} \cos m\varphi \cdot P_n^m(\mu), \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} d_{n0} P_n^1(\mu), \quad \tau_{r\varphi} = 0 \end{aligned}$$

と境界条件が与えられている場合。この場合には、内部および外部問題の両方の解が必要となるが、未知数は式の上で求められる。

5. 数値計算例 内半径 R_1 、外半径 R_2 の厚肉半球殻が風荷重を受けの場合(図-1)で、境界条件は $r=R_2$ において、 $\sigma_r = f(\theta) \cos \varphi$ 、 $f(\theta) = p \sin \theta \cdot (5 \cos^2 \theta - 1)$ 、 $\tau_{r\theta} = 0$ 、 $\tau_{r\varphi} = 0$ 、 $r=R_1$ において、 $\sigma_r = 0$ 、 $\tau_{r\theta} = 0$ 、 $\tau_{r\varphi} = 0$ である。また、 $\theta = \pi/2$ において、 $u_\theta = 0$ 、 $\tau_{r\theta} = 0$ 、 $\tau_{r\varphi} = 0$ である。計算結果を図-2および図-3に示した。図-3には、 $\rho = R_1/R_2$ を変化させて、 $N_0 = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_\theta dr$ として薄肉殻理論^{注)}による解析結果と3次元解析による結果との比較を示した。図には、 $\rho = 0.9$ まで示しているが、 $\rho = 0.95$ (厚さと外半径の比=0.05) とすると両者は数字2~3桁一致する。

注) K. Girkmann: Flächenenträgerwerke, pp.

379-383, Springer-Verlag, 1963

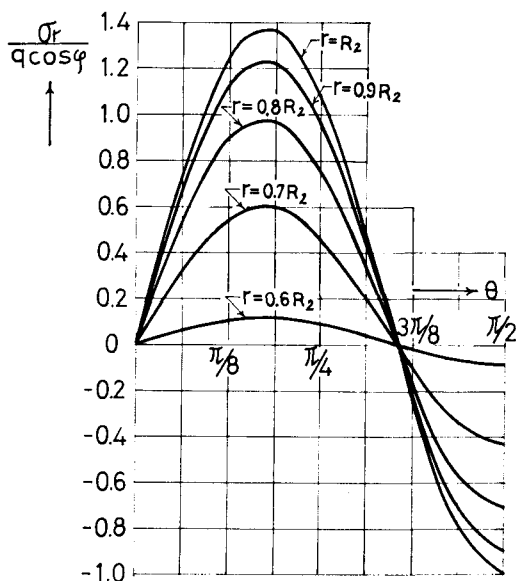
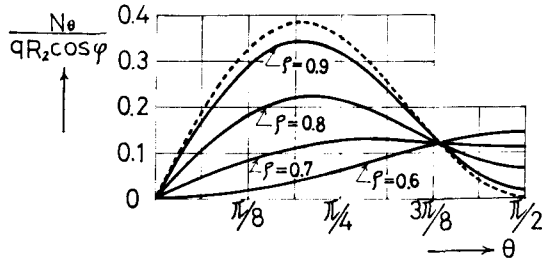


図-2 σ_r の分布 ($\rho=0.5$, $\nu=0.25$)



.....: 殻理論 ———: 3次元解析

図-3 薄肉殻理論との比較