I-10　　3次元動揺解析

中央大理工・土木　(正) 中澤晶平　　ユニック　(正)°田部井和夫

1. 緒言　　従来，薄肉円筒殻に対する流体と構造物との連成振動の問題は，固有値解析であれ，応答解析であれ，2次元あるいは軸対称モデルをフーリエ級数展開して取り扱われた。著者らは解析対象を3次元モデルとして評価し，3次元動揺解析の実用的な手法を開発した。ここで用いた手法は，自由水面の挙動が外部構造物に対して大きく影響を及ぼさない振動に着目して，流体の影響も構造物に対する有効質量として考えた。そして自由水面の挙動は流体内部に生ずるポテンシャル変動に依存すると考えられる。

2. 基礎方程式　　ここでは，坂井等[1]の用いた数値モデル及びL. ANQUEZ等[2]が発表した軸対称モデルによる固有値解析より若干の近似のもとに導かれた本手法を概説する。流体は非粘性，非圧縮性であり，その運動は非回転であると仮定し，微小振巾波理論が適用できるものとする。構造物は微小変形の弾性体とする。まず，流体，構造物に対して個別に基礎式を提示する。

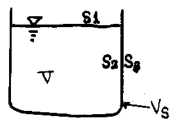

図-1　モデル

1) 流体に対しての基礎式

$$\begin{cases} \varphi_{,ii}=0 & \text{(連続の式)} \quad \text{in } V & (1)\\ \varphi_{,i}n_i=\dot{u}_i n_i & \text{(境界条件式)} \quad \text{on } S_2 & (2)\\ \varphi_{,i}n_i=\dot{\eta} \quad \rho\dot{\varphi}+\rho g\eta=0 & \text{(自由水面の式)} \quad \text{on } S_1 & (3)\end{cases}$$

2) 構造物に対しての基礎式

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}=\rho_s\ddot{u}_i & \text{(運動方程式)} \quad \text{in } V_s & (4)\\ \sigma_{ij}n_j=\hat{P}_i & \text{(境界条件式)} \quad \text{on } S_3 & (5)\\ \sigma_{ij}n_j=\rho\dot{\varphi}n_i & (\quad〃\quad) \quad \text{on } S_2 & (6)\\ \varepsilon_{ij}=\tfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) & & (7)\end{cases}$$

φ；速度ポテンシャル
u_i；変位
η；波高
ρ；流体の単位体積重量
ρ_s；構造　〃

坂井等は，特に流体に対して汎関数 $I(\varphi)=(\rho/2)\int_V\{(\partial\varphi/\partial r)^2+(\partial\varphi/r\partial\theta)^2+(\partial\varphi/\partial z)^2\}dV+(\rho/g)\int_{S_1}(\partial^2\varphi/\partial t^2)\varphi\, r\,dr\,d\theta+\rho\int_{S_2}(\partial w/\partial t)\varphi\, r\,d\theta\,dz$ を定義し，その第1変分を求め有限要素法の適用を行い，さらに構造物に対しても個別に振動方程式を求めている。連成振動方程式は別個に誘導した振動方程式を境界上での力のつりあいを利用して結合している。

L. ANQUEZ等は，(1)，(3)，(4)式に重み関数 φ^*, η^*, u^* を掛け任意領域で積分したガラルキン法による Weak form を示めしている。さらに $u=u^0e^{i\omega t}$，$\eta=\eta^0e^{i\omega t}$，$\varphi=\varphi^0 i\omega e^{i\omega t}$ を代入し最終的には固有値問題に帰着させている。

以上のモデルを更に簡単にして完全なる3次元問題としての記述を試みる。現象を考えるとき，次の条件のもとで最適な数値モデルを導くことを目標とする。すなわち，

① 3次元モデルを用いて固有値解析と応答解析を行なう。
② ①に伴う計算機使用時のりスクを最小にする。つまり，未知量（変位，速度ポテンシャル，波高）の減少及び作成された行列の性質を良くすることを計る。
③ ②の条件より自由水面の挙動が振動方程式の中に直接影響しないようにする。

この条件下での基礎式は，上記のものから(3)を除いたものである。それらの式から振動方程式を導き出してみる。まず，(1)式に重み φ^* を，(4)式に重み u_i^* をそれぞれ掛け任意領域で積分すると，各々次のようになる。

$$\int_V \varphi_{,ii}\varphi^* dV=0 \quad \cdots(8) \qquad \int_{V_s}\sigma_{ij,j}u_i^* dV_s=\rho_s\int_{V_s}\ddot{u}_i u_i^* dV_s \quad \cdots(9)$$

さらに，前式を変形させると，各々次のようになる．

$$\int_V \rho\, \varphi_{,i}\, \varphi_{,i}^{*}\, dV - \int_{S_2} \rho\, \varphi^{*} \dot{u}_i n_i\, dS_2 = 0 \qquad (10)$$

$$\int_{V_S} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{*})\, dV_s + \int_{S_2} \rho\, \dot{\varphi}\, n_i u_i^{*}\, dS_2 + \int_{S_3} \hat{P}_i u_i^{*}\, dS_3 + \int_{V_S} \rho_s \ddot{u}_i u_i^{*}\, dV_s = 0 \qquad (11)$$

(10) (11) 式の Weak form に適当な形状関数を考え，それぞれに代入すると次のような行列式が得られる。

$$[F]\{\varphi\} - [A]\{\dot{u}\} = 0 \quad \cdots (12) \qquad [K]\{u\} + [A]^T\{\dot{\varphi}\} + [M]\{\ddot{u}\} = [P] \quad \cdots (13)$$

(12) 式より φ は $\{\varphi\} = [F]^{-1}[A]\{\dot{u}\}$ となり，(13)式に代入すると，

$$[K]\{u\} + [[M] + [A]^T[F]^{-1}[A]]\{\ddot{u}\} = \{P\} \qquad (14)$$

となり，この式が振動方程式になる。未知数は構造物の変位のみである。

一固有値問題に於ける波高 ； (14) 式で与えられる方程式の固有値問題は
$\left| [K] - \omega^2 ([M] + [A]^T [F]^{-1} [A] \right| = 0 \quad \cdots (15)$ で表わされる。波高ベクトル η は (9) 式の第2式より，$\eta = (1/g)\dot{\varphi}$ で与えられ，$\dot{u}$ と φ の関係を示す (12) 式を代入し求められる。つまり $\eta = (\rho/g)[F]^{-1}[A]\{u\}\omega^2$ となる。

一応答解析に於ける速度ポテンシャルと波高 ； (14)式に於いて時間間隔 Δt ごとの変位，速度，加速度がそれぞれ求まれば，速度ポテンシャル φ は (12) 式より求まる。さらに，波高は $\eta = (1/g)\dot{\varphi} = (1/g)\dfrac{\varphi_{tn} - \varphi_{tn-1}}{\Delta t}$ で求まる。

以上のように，簡便な方法ではあるが，Δt ごとに連成された形で波高及び速度ポテンシャルが求まることになる．

3.<u>有限要素法</u>　　有限要素法の適用にあたって，要素の特性を次のように決めた。(1)構造物に対しては，薄板3角形不完全3次非適合要素 (2)流体に対しては，8節点アイソパラメトリック要素とした。

構造要素では，要素のパラメーターを面内，面外とも $\{u_i\}^T = \{u_{1i}\ u_{1i,x}\ u_{1i,y}\ u_{2i}\ u_{2i,x}\ u_{2i,y}\ u_{3i}\ u_{3i,x}\ u_{3i,y}\}$ である。そして形状関数 Φ_m は線型独立項の積で $\Phi_m = \sum_{n=1}^{10} P_{mn} f_n^{(2)}$ である。

流体要素では，形状関数 $\phi_i = (1/8)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)$ を用いて行列を作成した。

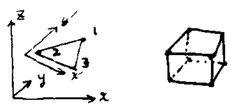

図-2　要素

行列 [A] は流体・構造の境界節点での法線方向変位による影響行列であり，境界上での速度ポテンシャルを規定する形状関数と法線方向変位を規定する形状関数の積の積分値と変換行列の積である。つまり，境界上での速度ポテンシャル φ は $\varphi = [N']\{\varphi_e\}$，法線方向変位 ω は $\omega = [P][R]^T\{u\}$ であり，行列 [A] は $[A] = [N'][P][R]^T$ となる。

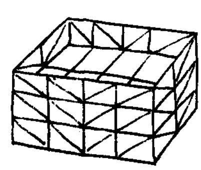
図-3　要素分割例

4.<u>結言</u>　　固有値解析では，軸対称，非軸対称のモードを確認出来た。応答解析では，フーボルト法の使用により良好な解を得ることができた。ここで用いた手法が，従来の軸対称モデルより現実的かつ実用性の高い手法であると思われる。

---

1) 坂井，迫田；円筒形液体タンクの地震応答解析，鋼構造協会第11回マトリックス解析法研究発表論文集 p337 (昭52)

2) L. ANQUEZ, H. BERGER, R. OHAYON, R. VALID; *Vibrations of tanks partially filled with liquids*, *Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales*