

1. 緒言

破壊の力学の分野においては、応力集中係数や応力拡大係数などを求める研究がさかんに行なわれてきている。^{1), 2)} 本論文では先の報告³⁾に引き続き、球かと円形き裂面に対して垂直方向に存在する無限体を考え、球かの影響による円形き裂面の変位、応力及び応力拡大係数について考察する。解析においては三次元弾性論に基づき、まず円形き裂面の境界条件を双積分方程式に帰着せしめ、未知関数を未定係数により表わし、次に球か面の境界条件を未定係数の無限連立一次方程式に帰着させた。

2. 変位ポテンシャルと境界条件

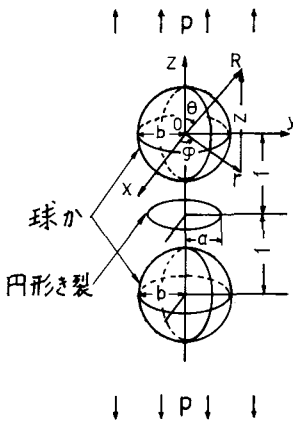


図1. 球かと円形き裂を有する無限体の引張り

図1. に示すような z 軸の無限遠方において分布引張り荷重 p を受ける無限体について考えよう。対称性を考慮して半無限体について、円柱座標 (r, φ, z) 、球座標 (R, θ, φ) を用い、円形き裂の中心から球か中心 O までの距離を1としてこれを単位長さとする。変位ポテンシャルとしては次のようなNeuber-Papkovichの解を用いる。

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, 2Gu_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, 2Gu_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ 2Gu_x &= z \frac{\partial \Psi}{\partial x}, 2Gu_y = z \frac{\partial \Psi}{\partial y}, 2Gu_z = z \frac{\partial \Psi}{\partial z} - (3-4\nu)\Psi, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0$ である。いま

$$\Phi = \frac{\nu}{1+\nu} p R^2 P_2(\mu), \Psi = -\frac{p}{2(1+\nu)} R P_1(\mu), \quad \dots (2)$$

とすれば z 軸の無限遠方で分布引張り荷重 p を受ける無限体の解が得られる。ここに $\mu = \cos \theta$ である。次に無限遠方ですべての変位及び応力が消失し、以下のような境界条件を満足する解を導き、式(2)を用いた解に重ね合わせれば、球かと円形き裂を有する無限体の引張りに対する解が得られる。

(i) 円形き裂面 $z = -1$ において

$$\tau_{rz} = 0, \quad 0 \leq r, \quad \dots (3)$$

$$u_z = 0, \quad a < r, \quad \dots (4)$$

$$\sigma_z = -p, \quad 0 \leq r < a. \quad \dots (5)$$

(ii) 球か面 $R = b$ において

$$\left(\frac{\sigma_R}{p} \right)_{R=b} = -\frac{1}{3} (P_0(\mu) + 2P_2(\mu)), \quad \dots (6)$$

$$\left(\frac{\tau_{R\theta}}{p} \right)_{R=b} = \frac{1}{3} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} P_2(\mu). \quad \dots (7)$$

球及び円柱調和関数について次式のものを用いる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= p \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{P_m(\mu)}{R^{m+1}}, \\ \Psi &= p \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{P_m(\mu)}{R^{m+1}}, \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= p \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \\ \Psi &= p \int_0^{\infty} \lambda \psi(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad \dots (9)$$

3. 解析方法

式(8)の球関数を次式により円柱関数で表わす。

$$\frac{P_n(\mu)}{R^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \lambda^n J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad (z < 0). \quad \dots (10)$$

式(8), (9)より得られる応力を重ね合わせ、境界条件式(3), (4), (5)より双積分方

程式が得られる。これを解くと未知関数 $\Phi(\lambda)$ と $\psi(\lambda)$ は未定係数 A_n, B_n を用いて表わすことができる。次に式(9)の円柱関数を次式により球関数で表わす。

$$e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda R)^n}{n!} P_n(\mu) \dots (11)$$

式(8), (9)より得られる応力を重ね合わせると境界条件式(6), (7)は結局, A_n, B_n の無限連立一次方程式に帰着される。次に円形き裂面 $z=-1$ におけるモードIの応力拡大係数を次式により定義する。

$$K_I = \lim_{r \rightarrow a^+} [2\pi(r-a)]^{\frac{1}{2}} \sigma_z(r, \theta, -1) \dots (12)$$

4. 数値結果

円形き裂面 $z=-1$ における変位と応力の分布が図2と3にそれぞれ示されている。円形き裂の半径 a を一定にした場合, 球かの半径 b が大きくなるに伴い 変位はき裂面上において減少してゆき, 応力についてはき裂近傍での値が減少してゆくのがわかる。また図4では 応力拡大係数の変化が示されており, 球かの半径の増加に伴い, 応力拡大係数は減少してゆく。(図中の曲線は精度が0.1%以上である結果であるが, 球かの半径が約0.7以上になると計算精度が悪くなるため図示していない。)

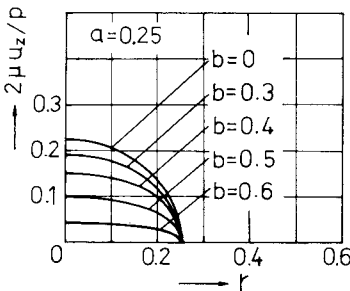


図2. 変位 u_z の分布 ($z=-1$)

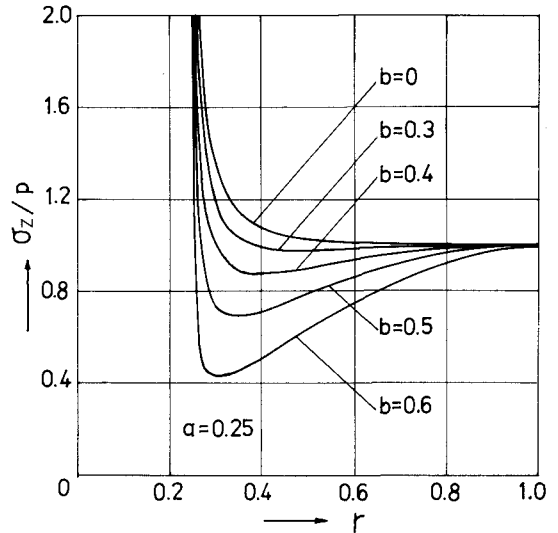


図3. 応力 σ_z の分布 ($z=-1$)

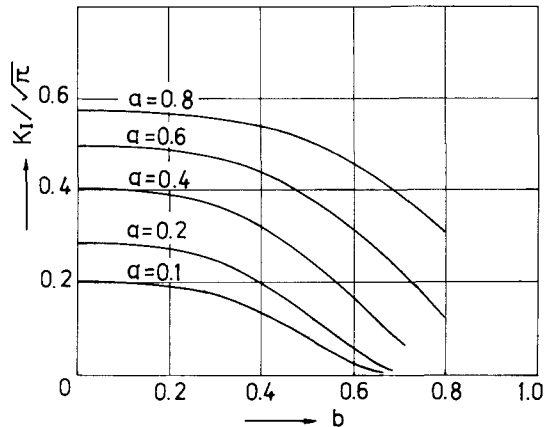


図4. 球かの半径の変化に伴う円形き裂の応力拡大係数の変化。

5. 参考文献

- 1) G.C. Sih, *Three dimensional crack problems*, (1975), Nordhoff.
- 2) 石田誠, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (1976), 培風館.
- 3) 平井, 佐武, 球かを有する弾性体中の円形き裂に関する考察, S52年度東北支部発表会, p.48
- 4) I.N. Sneddon, *Fourier Transform*, (1957), p.514, McGraw-Hill.
- 5) P.M. Morse & H. Feshbach, *Method of theoretical Physics, Part II* (1953), p.1318, McGraw-Hill.