

大阪工業大学

正員 岡村 宏一

東洋技研コンサルタント(株)

正員 O 島田 功

1. まえがき: 集中力問題の解として, Kelvinの解(無限体領域問題), Mindlinの解(半無限体領域問題)があり, これらは, 素解として多くの3次元問題の解析に利用されている。ところで, 問題に応じた境界表面を持つ素解を利用することができれば, 解析上, 境界処理を容易にし, 精度をより向上することができるのである。本報告は, このような観点から隣接する3つの境界表面を持つ1/8無限体の素解を提案すると共に, コらに多くの境界表面を持つ問題へのアプローチを示したものである。本解析手法は, 特異点解法であり, 集中力を受ける無限体の解を特解とし, 境界条件を満足させるために設けた鏡像点の特異性を持つ解を求め, これら特異解の集合として, 実領域を作り出すものである。なお, これらの1部については, すでに別報で示した。¹⁾

2. 基礎式, および基本解; 均質な等方弾性体の基礎式は,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \xi_1 = 0, \quad \nabla^2 \xi_2 = -\frac{\lambda + G}{G} \frac{\partial}{\partial z} \xi_1, \quad \nabla^2 \xi_3 = 0 \quad \text{----- (1)} \\ \text{ただし, } \xi_1 = e, \quad \xi_2 = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \xi_3 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

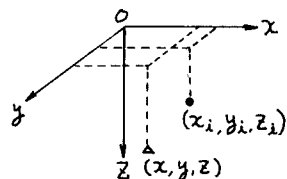


図-1

式(1)の (u, v, w) , (x, y, z) をサイクリックに変えることにより, 表示を変えれば残り2組の基礎式が得られる。²⁾ 式(1)の解および変位成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \xi_1 = \frac{A}{r}, \quad \xi_2 = \frac{B}{r} - \frac{\lambda + G}{2G} A \frac{\partial r}{\partial z}, \quad \xi_3 = \frac{C}{r} \quad \text{----- (2)} \\ \text{ただし, } A, B, C: \text{積分定数, } r^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \end{aligned}$$

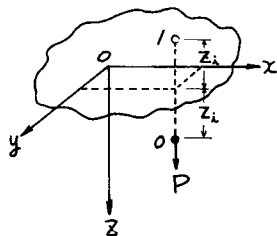


図-2

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{G} \iint \left\{ (\lambda + 2G) \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - G \frac{\partial \xi_2}{\partial z} + G \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \right\} dz d\bar{z} \\ v &= -\frac{1}{G} \iint \left\{ (\lambda + 2G) \frac{\partial \xi_1}{\partial y} - G \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - G \frac{\partial \xi_3}{\partial z} \right\} dz d\bar{z} \\ w &= \int \xi_2 dz \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (3)}$$

式(2)は, 図-1の点 (x_i, y_i, z_i) の特異性を持つ無限体の解であり, 微分したものは, 集中力問題の解となる。集中力Pを受ける無限体の解は, 次のようになる(添字oをつけてあらわす)。

$$\begin{aligned} \xi_1^o = A_o \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \xi_2^o = B_o \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\lambda + G}{2G} A_o \frac{\partial^3}{\partial z^3} (r), \quad \xi_3^o = 0 \quad \text{----- (4)} \\ \text{ただし } A_o = \frac{P}{4\pi} \frac{1}{\lambda + 2G}, \quad B_o = \frac{P}{4\pi} \frac{1}{G} \end{aligned}$$

3. 境界条件, および鏡像点の解; $z=0$ の境界条件を示す。

$$\text{a) 応力零の境界; } \lambda \xi_1 + 2G \xi_2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \xi_1 + 2G \xi_2) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \xi_3 = 0 \quad \text{----- (5)}$$

$$\text{b) 変位零の境界; } \xi_1 - \xi_2 = 0, \quad \int \xi_2 dz = 0, \quad \xi_3 = 0 \quad \text{----- (6)}$$

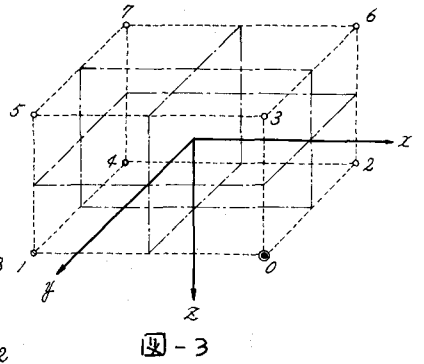
式(4), まちば(5)を満足させるために, 図-2に示すように鏡像点(1)の特異性を持つ解を重ねる。式(4)の特解に対する境界調整解を示す次のようになる。

$$\xi_1 = A_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right) + A_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right), \quad \xi_2 = B_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right) + B_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right) - \frac{\lambda + G}{2G} \{ A_1 \frac{\partial^3}{\partial z^3} (r_1) + A_2 \frac{\partial^3}{\partial z^3} (r_1) \}, \quad \xi_3 = 0 \quad \text{----- (7)}$$

$$\text{ただし, } r_1^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z + z_i)^2$$

一般に, 鏡像点の特異性を持つ解は, 元の解に対し, 1/8部分の導関数を含む解として与えることにより, 境界面で, 式(5), まちば(6)を満足するように積分定数を定めることができる。

4. $1/8$ 無限体の解析解; 図-3に示すように点(0)で、式(4)に示した特解を与え、鏡像点の群、点(1)~(7)に式(7)に示すように、より高階の導関数を含む解を重ね合わせることにより、 $x=0$, $y=0$, $z=0$ の境界面で境界条件を満足するように積分定数を決し、標記の解を得る。



5. 解析解の応用; 図-4のような $1/8$ 無限体(境界面 F_1)と、半無限体(境界面 F_2)を組合せた問題を考える。まず荷重 P を含む $1/8$ 無限体の解(特異点0~1)を与え、図(b)図に示す F_1 面の境界条件を作る。次に、これらの特異点に対する境界面 F_2 の鏡像点(1'~2')を設け、

半無限体の境界面 F_2 を作る特異解を重ねる(図-4(c)参照)。この解により F_1 面の境界は乱さぬ、再び、前出の特異点に対する F_1 面で鏡像点(2~3)を設け、 F_1 面の境界条件を満足させる解を重ねる。

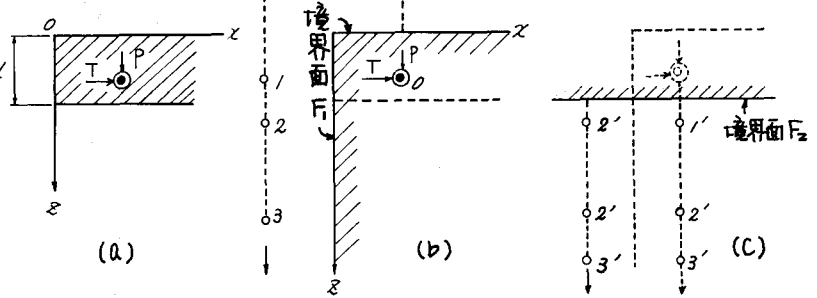


図-4

重なる。このようにして、1つの境界面を満足させるために重ねた特異解による他面への乱れを打消す過程を交互に繰返す。このような重畳調整の手法により、特異点は次第に離れを行き、実領域内の応力を収束させることが出来る。

6. 計算例; 集中力 P を受ける図-5の問題を5.の手法により解析し、図-6, 7に固定面の応力を $1/8$ 無限体の場合(破線)と比較して示した。図-8はリラクゼーション回数と応力の収束状態を主要点の直応力について示したもので、この解析例では、3回程度のリラクゼーションで、収束するようである。

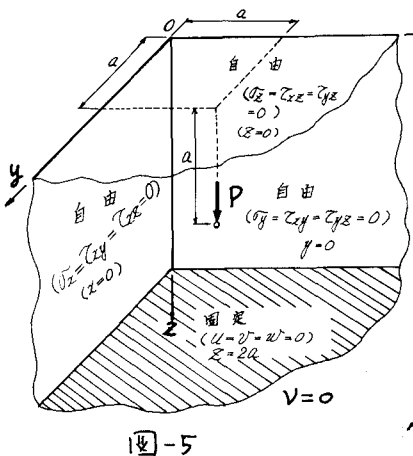


図-5

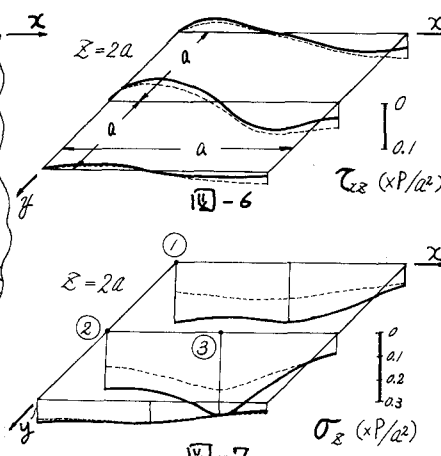


図-6

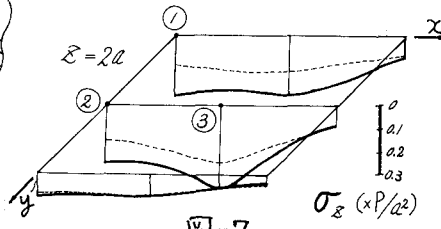


図-7

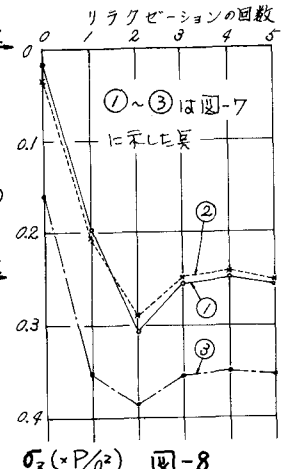


図-8

- 1) 図5, 島田; 内部に集中力を受ける $1/8$ 無限等方性体の解析解, 土木学会関西支部講演概要, 昭.53
- 2) 式(1)は、図-1において、 $z=0$ の境界条件を満足させる場合の基礎式である。 $x=0$, および $y=0$ の境界表面を満足させる場合は、表示を変えて2組の基礎式をそれぞれ用いる。