

大成建設(株) 小林 俊昭
山梨大学工学部 平島 健一

1. まえがき

平板の解析において三次元弾性理論を適用し、その応力、変形状態を正確に把握することは極めて困難なことが知られている。そこで、板内の三次元的な応力、変形状態を板の厚さ方向にわたって仮定し、その解析を簡単化しようとする平板理論が考えられている。その代表的なものにせん断変形の影響を考慮した変位仮定にもとづく Mindlin による理論ならびに応力仮定にもとづく Reissner による理論の二つがある。

本文は上述の二つの仮定と一般的な非等質および非均質を有する平板に適用し、これらの理論の肉体和考察を拡張を試みたものである。本文において用いる記号の正方向は Fig. 1 に示すようにとするものとし、基準座標系 x_1, x_2 軸は板中央面内にあるものとする。

2. 二次元化と各基本式の誘導

(I) 変位仮定による理論

均質で厚さ一定の異方性薄板が張り合わさってできた厚さ h の多層平板を対象として、せん断変形を考慮した基礎式と変位仮定から誘導する手順を示せば Fig. 2 のようになる。

$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{aligned} u_\alpha &= \tilde{u}_\alpha + \hat{u}_\alpha(x_1, x_2) = z \psi_\alpha(x_1, x_2) + \hat{u}_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3 &= w, \quad (\text{= 即ち, } \psi_\alpha \text{ は板中央面の回転角}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma^{33} = 0 \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\textcircled{3} \quad \left\{ \begin{aligned} N^{\alpha\beta} \\ M^{\alpha\beta} \\ Q^\alpha \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} D^{\alpha\beta\lambda\mu} & R^{\alpha\beta\lambda\mu} & D^{\alpha\beta\lambda 3} \\ R^{\alpha\beta\lambda 3} & K^{\alpha\beta\lambda 3} & R^{\alpha\beta\lambda 3} \\ D^{\alpha 3\lambda\mu} & R^{\alpha 3\lambda\mu} & D^{\alpha 3\lambda 3} \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \hat{\epsilon}_{\lambda\mu} \\ \chi_\lambda \\ \gamma_\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\text{= 即ち, } D^{\alpha\beta\lambda\mu} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (E^{\alpha\beta\lambda\mu} - \frac{E^{\alpha\beta 33} E^{\gamma\gamma\lambda\mu}}{E^{3333}}) z \, dz, \text{ etc.}$$

$$K_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (\psi_{\lambda\mu} + \psi_{\mu\lambda}), \quad \gamma_\lambda = w_{,\lambda} + \psi_\lambda$$

$$\textcircled{4} \quad \left\{ \begin{aligned} N^{\alpha\beta}_{||\rho} + p^\alpha &= \rho^* \frac{\partial^2 \hat{u}_\alpha}{\partial t^2} + \rho^{**} \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial t^2} \\ M^{\alpha\beta}_{||\rho} - Q^\alpha + \eta C^\alpha &= \rho^{**} \frac{\partial^2 \hat{u}_\alpha}{\partial t^2} + \rho^{***} \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial t^2} \\ Q^\alpha_{||\rho} + p^\alpha &= \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\textcircled{5} \quad \left\{ \begin{aligned} \text{変位: } u_\alpha, u_3, w, \psi_\alpha, \psi_3 \text{ の規定} \\ \text{断面力: } N^\alpha, N^{\alpha\beta}, Q^\alpha, M^\alpha, M^{\alpha\beta} \text{ の規定} \end{aligned} \right\} \text{ (境界条件)} \dots\dots\dots (2.5)$$

式 (2.3), (2.4) および境界条件式 (2.5) が平板問題の基礎方程式である。最も簡単な例として、板表面に p なる分布荷重を受ける等質等方性 a 板の基礎方程式を直交デカルト系において示せば、次のように Mindlin によるものの一一致する。

$$\text{(構成方程式)} \quad M_x = D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right), \quad M_y = D \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} \right), \quad Q_x = \kappa R G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right), \quad Q_y = \kappa R G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\text{(運動方程式)} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \frac{\rho R^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = \frac{\rho R^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\text{(境界条件式)} \quad \text{a) } M_n = 0 \text{ or } \psi_n \text{ が規定} \pm \text{ 可。 b) } M_{ns} = 0 \text{ or } \psi_s \text{ が規定} \pm \text{ 可。 c) } Q_n = 0 \text{ or } w \text{ が規定} \pm \text{ 可。} \dots\dots\dots (2.8)$$

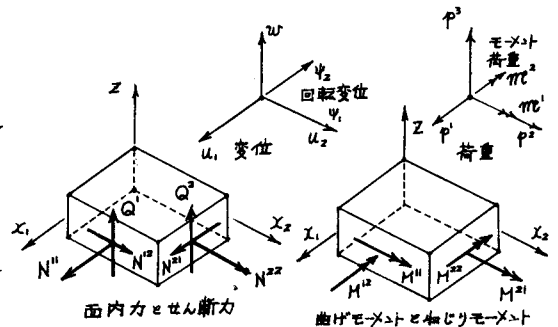


Fig. 1

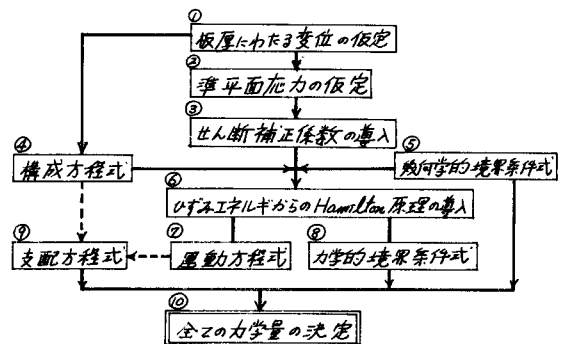


Fig. 2

$$\text{= 即ち, } \rho^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \, dz, \quad \rho^{**} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z \, dz, \text{ etc.}$$

式(2.4), (2.5)から支配方程式が次のようになる。 $(\nabla^2 - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(D \nabla^2 - \frac{\rho R^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2})W + \rho R \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = (1 - \frac{D}{\kappa R G} \nabla^2 + \frac{\rho R^2}{12 \kappa G} \frac{\partial^2}{\partial t^2})P \dots (2.9)$

(II) 応力仮定による理論

応力分布を仮定したものから基礎式を誘導する手順と前と同様に示せば次のようになる (Fig. 3 参照)。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sigma_{xx}^0 &= \frac{\hat{N}^0}{R/6} \frac{x}{R/2} + \frac{\hat{N}^0}{R} \\ \sigma_{xx}^1 &= \frac{\hat{Q}^0}{24G} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{R/2}\right)^2 \right\} - \frac{\hat{P}^0}{4} \left\{ 1 - 2\left(\frac{x}{R/2}\right) - 3\left(\frac{x}{R/2}\right)^2 \right\} \dots (2.10) \\ \sigma_{xx}^2 &= \frac{3}{4} P \left\{ \frac{x}{3} + \frac{x}{R/2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{R/2}\right)^3 \right\} \end{aligned}$$

上式は面内作用をも考慮した場合であるが、曲げ作用

のみに限定するものとすれば、 $P^0 = \hat{N}^0 = 0$ とすればよく、その結果は Reissner が仮定したものになる。

等質の異方性平板における支配方程式：

$$\textcircled{3} \quad M_{xx}^0 - Q^0 = \frac{\rho R^2}{12} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad Q_{xx}^0 + P^0 = \rho R \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (\rho R: \text{断面にわたる平均回転角}, W: \text{平均変位}) \dots (2.11)$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{12}{R^3} C_{4433} M_{xx}^0 + \frac{6}{5R} C_{4433} Q^0 - \beta_4 P^0 = 0, \quad \frac{24}{5R} C_{4433} Q^0 - (W_{xx} + \beta_4) + 2 C_{4433} P^0 = 0 \dots (2.12)$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \quad \text{a) } M_{xx} = 0 \text{ or } \beta_4 \text{ が規定される。 b) } M_{xx} = 0 \text{ or } \beta_4 \text{ が規定される。 c) } Q_{xx} = 0 \text{ or } W \text{ が規定される。} \dots (2.13)$$

具体例として面内等方性の性質と有する板の支配方程式と示せば次式となる。(直交座標系に対し)

$$(\nabla^2 - \frac{\rho R}{C_s} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(D \nabla^2 - \frac{\rho R^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2})W + \rho R \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left\{ 1 - \left(\frac{D}{C_s} - \frac{1+\nu}{C_n} D\right) \nabla^2 + \frac{\rho R^2}{12 C_s} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} P, \quad \left(\frac{C_s}{C_n} = \frac{5}{6} \frac{E_1}{E_2}, C_n = \frac{5}{6} \frac{E_2}{\nu_2} \right) \dots (2.14)$$

(III) Mindlin 理論の拡張

Fig. 2 および式(2.2)に示したように Mindlin の変位仮定による理論は $\sigma_{zz}^0 = 0$ という準平面応力の仮定を行っている。こゝではこの仮定をはずし、板表面上の境界条件： $\sigma_{zz}^0 = P$, $\sigma_{zz}^0 = 0$ と満足するように最も簡単な正交直応力の仮定：

$$\sigma_{zz}^0 = P \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{R} \right) \dots (2.15)$$

を行えば、等方等質性板に対する以下の支配方程式となる。

$$(\nabla^2 - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(D \nabla^2 - \frac{\rho R^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2})W + \rho R \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \left\{ 1 - \left(\frac{D}{\kappa R G} - \frac{1+\nu}{C_n} D\right) \nabla^2 + \frac{\rho R^2}{12 \kappa G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} P, \quad (\kappa = 1, C_n = \frac{R}{D}) \dots (2.16)$$

8) の、もう一つの変位仮定理論の拡張として、等方等質性板の場合に限定して、Mindlin の変位仮定と Reissner の応力仮定の合成した理論を展開すれば、Reissner 理論から得られた基本式と同形のものとなる。

3. 応用例

せん断変形を考慮した各理論を用いて等質等方性の四辺単純支持の正方形板の上表面に $P = P_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$ の正弦分布荷重が作用する場合の静的問題に限定し、板中央点のたわみ w と古典理論によつたたわみ w_0 との比 w/w_0 と R/a との関係として計算した結果を Fig. 4 に示す。ただし、せん断補正係数 $\kappa = 5/6$ として計算を行った。図中 simplified とあるのは板厚 h の高次の order の項は無視できると仮定した、いわゆる order estimation による簡単化して求められたものである。

参考文献：

- 1) E. Reissner, "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", J. Appl. Mech. (1945), pp. A69~A74.
- 2) E. Reissner, J. Math. Phys. Vol. 23 (1944), pp. 184~191; Quart. Appl. Math., Vol. 5 (1947), pp. 55~68; Int. J. Solids & Structures, Vol. 11 (1975), pp. 569~573.
- 3) R. D. Mindlin, J. Appl. Mech., Vol. 18 (1951), pp. 31~38.
- 4) C. L. Dym and I. H. Shames, Solid Mechanics — A Variational Approach —, McGraw-Hill (1973), pp. 280~419.
- 5) 登坂宣好, 日本大学生産工学部報告, 第6巻第2号 (1973), pp. 45~53.
- 6) 日置英一郎, 構造力学Ⅱ, 朝倉書店 (1978), pp. 97~112.
- 7) 鷲津久一郎, エネルギー原理入門, 弾性学の変分原理概論, 培風館。

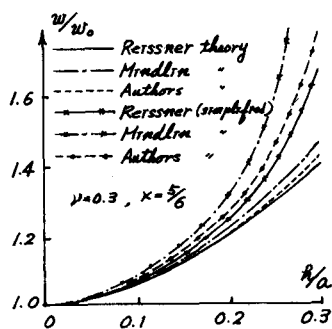


Fig. 4