I-2　　面内・面外荷重を受けるMicropolar弾性体の極座標系における基本解

日立電線(株)　○小池　豊
山梨大学・工学部　平島健一

1. はじめに

couple stress, body couple, local motionが含まれる微細構造を持つ固体の数学的特徴づけは，Voigt (1887), Cosserat (1909)によってかなり古い時代に成しとげられたが，1960年代までこの種の微細構造理論は完全には発達せず，実験的証明も行なわれることはなかった。これらの理論における中心的な考え方は，媒体の各々の点が剛体的な6つの自由度を持っているというCosserat連続体である。1964年Eringen & Suhubi[1]は連続体を特徴づけるために運動学的変数の節点子変量に関する42個の構成関数を必要とする非線形な微視弾性体(microelastic solids)を紹介した。線形等方性ではこれら42個の関数は18個の材料定数となる。(Mindlin (1964)[4]は変分原理を用いて，これと同様の結果を得た)。非対称のmicrorotationテンソルとstress momentテンソルを考えればEringen-Suhubi理論[1,2]はMindlin & Tiersten (1962)の線形couple stress理論[3]を特別な場合として含むことになるが，この制限は弾性媒体内のrigid microelementsを定義することに等しい。microrotationは線形な変位に対し運動学的に独立であり，その結果一般化されたCosserat連続体の6つの自由度は保持されている。Mindlin-Tiersten理論を含めたcouple stress理論を一般化し，1966年Eringen[5]はそれをmicropolar elasticityと改名した。

本文はmicropolar弾性体の極(円柱)座標系において，静的かつ物体力，物体偶力を無視して面内(in-plane)，面外(out-of-plane)の2つの問題の定式化と基本解のすべてを，変位法ならびに応力関数法の両者で統一的に誘導し，古典弾性論をも含めたこの種の成果を拡張補充する。さらに，上述の問題における支配式および基本解の対応関係を統合することを試みる。

2. Micropolar弾性論における面内および面外問題の定式化

(I) 基礎方程式

(記号の説明)
ε_{ijk}：permutationテンソル
t_{kl}＝応力テンソル
u_k＝変位ベクトル
m_{kl}＝偶応力テンソル
δ_{kl}＝クロネッカーのデルタ
ϕ_k＝microrotation ベクトル
r_m＝macrorotation ベクトル
J＝micro-inertia の係数
ε_{kl}＝microstrain テンソル
e_{kl}＝macrostrain テンソル
γ_{klm}＝micropolar ひずみテンソル

a] 運動量保存(釣合方程式)：　$t_{lk,l}=0$ ……(2.1)

b] 角運動量保存(力のモーメントの釣合方程式)：　$m_{lk,l}+\varepsilon_{kmn}t_{mn}=0$ ……(2.2)

c] 応力，偶応力に対する構成式：　$t_{kl}=\lambda\varepsilon_{jj}\delta_{kl}-\varepsilon_{kmn}\varepsilon_{kl}+\mu\varepsilon_{lk}$，$m_{kl}=\alpha\phi_{j,j}\delta_{kl}+\beta\phi_{k,l}+\gamma\phi_{l,k}$ (2.3)

d] 運動学的関係式：　$\varepsilon_{kl}=e_{kl}-\varepsilon_{klm}(r_m-\phi_m)$，$e_{kl}=\frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k})$，$r_m=\frac{1}{2}\varepsilon_{mnp}u_{p,n}$ …(2.4)

e] 適合条件式：　$\varepsilon_{ik,j}-\varepsilon_{jk,i}+\gamma_{ikj}-\gamma_{jki}=0$，$\varepsilon_{klr}(\gamma_{klm,n}-\gamma_{kln,m})=0$，$\gamma_{klm}=\varepsilon_{kln}\phi_{n,m}$ …(2.5)

古典理論におけるNavierの方程式の誘導過程と同様にして(2.1)~(2.5)の基礎式からベクトル表示の変位場の支配方程式を求めると最終的に次式のようになる。

$$(\lambda+2\mu+\kappa)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-(\mu+\kappa)\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}+\kappa\nabla\times\boldsymbol{\phi}=0,\quad(\alpha+\beta+\gamma)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi}-\gamma\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\phi}+\kappa\nabla\times\boldsymbol{u}-2\kappa\boldsymbol{\phi}=0 \quad\cdots\cdots(2.6)$$

ここに，円柱座標系に対して，変位ベクトル：$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{e}_r+v\boldsymbol{e}_\theta+w\boldsymbol{e}_z$，微視回転ベクトル：$\boldsymbol{\phi}=\phi_r\boldsymbol{e}_r+\phi_\theta\boldsymbol{e}_\theta+\phi_z\boldsymbol{e}_z$

さらに，応力，偶応力－変位，微視回転の関係式をテンソル表示で示すと次のようである。

$$t^{ji}=(\mu+\kappa)u^{i}|^{j}+\mu u^{j}|^{i}+\kappa\varepsilon^{jik}\phi_k+\lambda g^{ji}u^{k}|_k,\quad m^{ji}=\beta\phi^{i}|^{j}+\gamma\phi^{j}|^{i}+\alpha g^{ji}\phi^{k}|_k \quad\cdots\cdots(2.7)$$

ここに，| を共変微分を表わし，g^{kl}は基本計量テンソル，$\phi_1=\phi$，$\phi_2=\phi_r$，$\phi_3=\phi_z$ をそれぞれ表わす。

(II) 変位法による定式化

[A] 面内問題　　仮定：$u_z=\phi_r=\phi_\theta=0$，$u_r=u(r,\theta)$，$u_\theta=v(r,\theta)$，$\phi_z=\omega(r,\theta)$ ……(2.8)

仮定(2.8)のもとで(2.6)を書き下すと次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+2\mu+\kappa)\left(u_{,rr}+\frac{1}{r}u_{,r}-\frac{1}{r^2}u+\frac{1}{r}v_{,r\theta}-\frac{1}{r^2}v_{,\theta}\right)-(\mu+\kappa)\left(\frac{1}{r}v_{,r\theta}+\frac{1}{r^2}v_{,\theta}-\frac{1}{r^2}u_{,\theta\theta}\right)+\kappa\cdot\frac{1}{r}\omega_{,\theta}=0\\&\gamma\left(\omega_{,rr}+\frac{1}{r}\omega_{,r}+\frac{1}{r^2}\omega_{,\theta\theta}\right)+\kappa\left(v_{,r}+\frac{1}{r}v-\frac{1}{r}u_{,\theta}-2\omega\right)=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2.9)$$

(2.9)の連立微分方程式において，$u(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}U_n(r)e^{in\theta}$，……，$\omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i\Omega_n(r)e^{in\theta}$ と置き，rに関する常微分方程式として，

整数 n の値を $n \geq 2$, $n=\pm 1$, $n=0$ の3ケースに分けて解を求め，(2.7)から応力，偶応力が最終的に之られる[8]。

[B] 面外問題　　仮定：$u_r = u_\theta = \phi_z = 0$, $u_z = w(r,\theta)$, $\phi_r = \phi(r,\theta)$, $\phi_\theta = \psi(r,\theta)$ ……………(2.10)

仮定(2.10)のもとで(2.6)を書き表わすと以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&(\mu+\kappa)(w_{,rr}+\frac{1}{r}w_{,r}+\frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta})+\kappa(\frac{1}{r}\psi+\psi_{,r}-\frac{1}{r}\phi_{,\theta})=0\\&(\alpha+\beta+\gamma)(\frac{1}{r}\phi_{,\theta r}+\frac{1}{r^2}\phi_{,\theta}+\frac{1}{r^2}\psi_{,\theta\theta})-\gamma(\frac{1}{r^2}\psi-\frac{1}{r}\psi_{,r}-\psi_{,rr}+\frac{1}{r}\psi_{,r\theta}-\frac{1}{r}\phi_{,r\theta}-\frac{1}{r^2}\phi_{,\theta})-(\kappa w_{,r}+2\kappa\phi)=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2.11)$$

いま，$w=\sum_{n=-\infty}^{\infty} i W_n(r)e^{in\theta}$, $\phi=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(r)e^{in\theta}$, $\psi=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n(r)e^{in\theta}$ とおいて，面内問題の場合と同様にして解を求めればよい。応力，偶応力は求められた微分方程式の解の組を(2.7)に代入すれば得られる。

(III) 応力関数法による定式化

[A] 面内問題　　仮定：$t_{xz}=t_{zx}=t_{yz}=t_{zx}=m_{xx}=m_{xy}=m_{yx}=m_{yy}=m_{zz}=0$，他の t_{jk}, m_{jk} は x, y の関数 ……(2.12)

この場合の解析手法の詳細は文献(10)に与えられているので，ここでは省略する。

[B] 面外問題　　仮定：$t_{xy}=t_{yx}=t_{xx}=t_{yy}=t_{zz}=m_{xz}=m_{zx}=m_{yz}=m_{zy}=0$，他の t_{jk}, m_{jk} は x, y の関数 ……(2.13)

① 釣合方程式：$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial y}=0$, $\frac{\partial m_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial m_{yx}}{\partial y}+t_{yz}-t_{zy}=0$, $\frac{\partial m_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial m_{yy}}{\partial y}+t_{zx}-t_{xz}=0$ ……………(2.14)

② 構成方程式：$t_{xz}=\mu(\varepsilon_{zx}+\varepsilon_{xz})+\kappa\varepsilon_{xz}$, $t_{yz}=\mu(\varepsilon_{yz}+\varepsilon_{zy})+\kappa\varepsilon_{yz}$,……, $m_{xx}=\alpha(\frac{\partial\phi_x}{\partial x}+\frac{\partial\phi_y}{\partial y})+(\beta+\gamma)\frac{\partial\phi_x}{\partial x}$,…………(2.15)

③ 運動学的関係式：$\varepsilon_{xz}=\phi_y$, $\varepsilon_{zx}=w_{,x}-\phi_y$, $\varepsilon_{yz}=w_{,y}-\phi_x$, $\varepsilon_{zy}=\phi_x$ ……………(2.16)

④ 適合条件式：$\varepsilon_{zy,x}-\phi_{x,x}=0$, $\varepsilon_{zx,y}+\phi_{y,y}=0$, $\varepsilon_{xz,y}-\varepsilon_{yz,x}-\phi_{y,y}-\phi_{x,x}=0$, $\phi_{y,yx}-\phi_{y,xy}=0$, $\phi_{x,xy}-\phi_{x,yx}=0$ ……(2.17)

⑤ 応力関数の導入：$t_{xz}=U_{,y}$, $t_{yz}=-U_{,x}$, $t_{zx}=V_{,x}-U_{,y}$, $t_{zy}=V_{,y}+U_{,x}$ ……………(2.18)

⑥ 支配方程式：$2U_{,x}+V_{,y}=2l_2^2(U_{,xxx}+U_{,yyx})+l_1^2(V_{,xxy}+V_{,yyy})$, $2U_{,y}-V_{,x}=2l_2^2(U_{,xxy}+U_{,yyy})-l_1^2(V_{,xxx}+V_{,xyy})$ …(2.19)

⑥′ Coupling を解除した支配方程式：$\nabla^2(U-l_2^2\nabla^2U)=0$, $\nabla^2(V-l_1^2\nabla^2V)=0$ ……………(2.19)′

ここに，$l_1^2=\frac{\gamma(\mu+\kappa)}{\kappa(2\mu+\kappa)}$, $l_2^2=\frac{2\kappa}{\alpha+\beta+\gamma}$, $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

(2.19)′式は応力関数法による面内問題に対する支配方程式[10]と形式的に一致しており，したがってそこでの考察結果がそのまま利用できる（ただし(2.19)の型の coupling に注意して適切な解を選定する必要があることは言うまでもない）。

Table 1 は micropolar 弾性論の面内ならびに面外問題に対する上述した変位法および応力関数法による支配方程式のまとめたものを示したものであり，参考のために古典弾性論に対する対応式も併記してある。

これらの支配方程式のそれぞれの場合に対して，基本解をすべて求めた。すなわち，円柱座標系における周期性，非周期性の変位解とそれらの組み合せによる dislocation の解を変位法および応力関数法の両者で統一的に誘導した。結果の詳細については学会当日に発表する。

Table 1.

		micropolar 理論	古典理論
支配方程式(ベクトル表示)		式(2.6)	$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot u-\mu\nabla\times\nabla\times u=0$
面内問題	変位法	式(2.9)	$\nabla^4 u=0$, $\nabla^4 v=0$
	応力関数法	$\nabla^4 U=0$, $\nabla^2(V-l_1^2\nabla^2V)=0$	$\nabla^4 U=0$
面外問題	変位法	$D^4W_n+\frac{2}{r}D^3W_n-(\frac{1}{l_1^2}+\frac{1+2n^2}{r^2})D^2W_n-\frac{1}{r}(\frac{1}{l_1^2}-\frac{1+2n^2}{r^2})DW_n+\frac{n^2}{r^2}(\frac{1}{l_1^2}+\frac{n^2-4}{r^2})W_n=0$	$\nabla^4 w=0$
	応力関数法	式(2.19)′	$\nabla^2 U=0$

ここに，$D=d/dr$

参考文献：

1) A.C. Eringen & E.S. Suhubi, Int. J. Eng. Sci., Vol.2 (1964), p.189　2) E.S. Suhubi & A.C. Eringen, Int. J. Eng. Sci., Vol.2 (1964) p.389　3) R.D. Mindlin & H.F. Tiersten, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol.11 (1962), p.415　4) R.D. Mindlin, Arch. Rat. Mech. Anal., Vol.16 (1964), p.51　5) A.C. Eringen, J. Math. Mech., Vol.15 (1966), p.909　6) A.C. Eringen, Fracture (ed. H. Liebowitz), Vol.2 (1968), Academic Press, p.621　7) H. Neuber, Acta Mech., Vol.2 (1966), p.48　8) B.M. Chiu & J.M. Lee, Int. J. Eng. Sci., Vol.11 (1973), p.997　9) P.P. Teodorescu, Dynamics of Linear Elastic Bodies, Abacus Press (1975), p.63　10) 平島・富沢，土木学会論文報告集，No.260 (1977), p.43　11) 南・平島・小池，土木学会第32回年次講演会講演概要集，I部 (1977), p.3