

1. 序言

1971年6月筆者は土木学会論文報告集190号に於ける假定の下に變形する物体の力学に從來とは異った考え方を示し、その後1〜2の応用例を提示したが、筆者の説明の仕方が拙劣であつたばかりでなく一部訂正を要する点もあり、会員諸兄のご同意をいただけたとは思えないと考えるのが至当のところであらう。この小論では變形する物体の一例として一つの梁の中央に或る質量を置いた場合この梁の内部の小さな世界に生起する事象を筆者の理論で記述してみようとするものである。弾性論では直応力と剪断応力を導入して議論を展開するが、この概念を排して別な観点から物体の變形を追求するわけである。

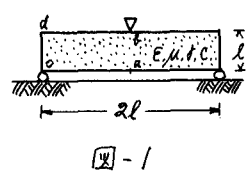
わが土木工学者が対象とする物体は地球上の重力場の中にある。いま考察の対象としている梁は地球の表面上に置かれている。梁の中央部に置かれた質量 $2M$ と地球とは互に引力を及ぼしあふ。梁を構成する物質の質量 m が場に及ぼす影響を無視すれば梁の内部の重力場 R_1 は載荷物 M と地球とで決められる。この場合 M と地球とは静止した状態にあるとする。従つて質量 M を載荷して充分時間が経過したときの力場を考察の対象とするわけ、このときの梁の内部の力場が R_1 であり筆者がS-1の世界と呼ぶものである。万有引力の式は電気力学のクーロンの法則と同形式であるので R_1 を静電場の世界と考えることも可能である。S-1の世界にはポテンシャル φ があるので層々述べた如く勾配場であつて $\text{rot } R_1 = 0$ 。また変位を S_1 で示せば $\text{rot } S_1 = 0$ 。この世界での R_1, S_1 等の伝播速度を C_1 とすれば、これは縦波の伝播速度であると筆者は考えた。

質量 M を載荷した後、 M と梁とが静止状態となるまでの時間はきわめて短く後述の如く横波の伝播する時間以上経過すれば静的状態となる。しかしこの極めて微小な時間内に從來見過していた事象が梁の内部に生ずると筆者は考える。それがS-2の世界である。そして我々が観察しているのはS-1とS-2の世界の合成された状態であると筆者は考える。

ベクトルの場合は勾配場と環流場とに分けられる。S-1の世界が勾配場であるのなら新しく追加されるS-2の世界は環流場ではなからうかと筆者は想像する。重力の場と考えられるS-1の主役がポテンシャル φ であるならば、環流場の特長は何であらうか。それは渦もしくは磁場である。梁を構成する物質の質量 m が R_1 の場の中で運動をすると何か新しい現象が環流場のなかに生じないであらうか。 M が載荷されて、 m は R_1 の場の中で変位をして静的状態に至るが、この短時間内にせよ質量 m の変位がある新しい事象を生むものと想像してみる。運動する電荷はそれが静止しているときには見られない効果を生むように、運動する質量 m は磁場に相当する渦場 W とそれにとまらう新しい力場 R_2 を作り出すと筆者は推論する。その記述の手法は電磁気学に学び得る筈である。これがS-2の世界で、この世界では $\text{div } R_2 = 0, \text{div } W = 0, \text{div } S_2 = 0$ 。事象の伝播速度 C_2 は横波の伝播速度であると考えた。

2. 基礎理論の再整理

図-1のように變形する物体として一つの梁を対象とし、これに属するS-1系の式を掲げる。物体即ち梁の物質常数を ϵ, μ, ρ, c とするがいまのところ梁の



内部でこれ等常数は定数と考え、又梁の内部でのエネルギー消耗に因する常数は零であるとする。

質量 m の定義は電質量の定義と同じで

$$m = \frac{\text{div } \epsilon R_1}{4\pi} \quad (2.1)$$

R_1 は $2M$ と地球との間に介在する梁の内部の力場の強さで;

$$R_1 = -\text{grad } \varphi \quad (2.2)$$

ポテンシャル φ と体積膨張 $\text{div } S_1$ とに因し筆者は一つの仮定をおいた。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\left(\frac{c}{\epsilon} + d\right) \text{div } S_1 \quad (2.3)$$

$$\text{また } R_1 = \frac{\mu}{2c} \dot{S}_1 \quad (2.4)$$

(2.3), (2.4) 式のような奇妙な仮定が妥当であるのかは具体的に事例に筆者の考え方を適用して得られた

結果を吟味するより仕方がない。以上述べた式を背景にしてS-1系の事象を記述するものとして;

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_{\vec{p}_1} &= (C_1)^* \nabla^2 \vec{p}_{\vec{p}_1} \\ \text{rot } \vec{p}_{\vec{p}_1} &= 0 \\ C_1 &= \sqrt{\frac{2C}{\mu} \left(\frac{C}{\varepsilon} + t \right)} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$\vec{p}_{\vec{p}_1}$ は φ , R_1 又は S_1 をあらはす。

次に残された環流場即ちS-2の世界は序言に述べた如く電磁場的な色彩を持っている。流体の内部に或る角速度を持った渦線が存在するとき生ずる速度場がビオ・サバールの法則に似た振舞いをするが、 R_1 の場の中で質量 m が変位するとき起る現象との関連はないのであろうか。この様に考えてS-2の世界を筆者流に描いてみる。S-2の世界の特色は渦場 W の存在である。変位 S_2 に対し

$$W = \frac{1}{2} \text{rot } S_2 \quad (2.6)$$

と書くとき筆者の提案した基本式は次の2式である。

$$\mu \dot{W} = -C \text{rot } R_2 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon \dot{R}_2 = C \text{rot } W \quad (2.8)$$

エネルギーの流れはS-2の世界を肯定することにより論ずることが出来るが、次のポインティング・ベクトルとしてあらはせる。

$$\vec{G} = \frac{C}{4\pi} [R_2 \times W] \quad (2.9)$$

これ等の式より、 $\vec{p}_{\vec{p}_2}$ は R_2 , W 又は S_2 をあらはすとして、

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_{\vec{p}_2} &= (C_2)^* \nabla^2 \vec{p}_{\vec{p}_2} \\ \text{div } \vec{p}_{\vec{p}_2} &= 0 \\ C_2 &= \sqrt{\frac{C^2}{\varepsilon \mu}} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

3. 解を構成する基本的な函数の探求

図-1の問題を解く作業に入るが、その前にわれわれの解の基本となる函数を準備しなければならぬが、流体力学で知られている手法が我々の手助けをする。

図-1の支間 $2l$ の梁の中央断面 ab の直上 b 点に所謂集中荷重として質量 M を載荷しその過渡現象が終了したとき梁の下面が水平になったとする。この時左支点 O を座標原点とし図-2の如く x, y 座標を定め、梁の左半分に着目する。

S-1の世界は重力場であるが屢々述べた如く静電場と見なすことが出来る。O点に正電荷があり b 点に負電荷がある場合の電気力線とポテンシャル線を想像する

わけである。このことを流体力学で解釈すれば、O点に湧出(湧点O印)があり b 点に吸込(吸点 b 印)があるときの流線とポテンシャルに相当する。そこで等角寫像の手法を借用するが、この場合登場するのは橋円函数である。

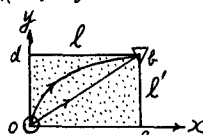


図-2

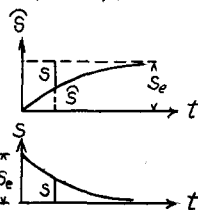


図-3

湧出、吸込の強度を Γ とし、図-2の場合の速度ポテンシャル ϕ を求めその函数を我々の解に利用する。

$$\phi = \Gamma \log \frac{dw + Cdw'}{dw' - Cdw} \quad (3.1)$$

$$u = \frac{x}{\Omega}, \quad v = \frac{y}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{l}{K} = \frac{l'}{K'}$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2}{\Omega} \frac{\sin u \cdot dw'}{1 - Cdw \cdot dw'} \\ V_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2}{\Omega} \frac{dw \cdot \sin v'}{1 - Cdw \cdot dw'} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

S-2の世界を記述する函数を探求した結果、O点に湧出があり a 点に吸込がある場合の流線の速度 H が役に立つことを発見した。

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{2}{\Omega} \frac{K^2 \sin u}{dw' - Cdw} \\ H_y &= \frac{2}{\Omega} \frac{K^2 \sin v'}{dw' - Cdw} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

4 集中載荷された梁の振舞い。

載荷された梁よりその載荷を除去した場合の変形状態を記述してみる。(図-3)参照。S-1の世界に於いて次の諸式が(2.5)式の解であることが出来る。 $A = M/\varepsilon$

$$\left. \begin{aligned} R_{1x} &= A e^{-C_1 t - z} \cdot V_x & S_{1x} &= -\frac{2C}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-C_1 t - z} \cdot V_x \\ R_{1y} &= A e^{-C_1 t - z} \cdot V_y & S_{1y} &= -\frac{2C}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-C_1 t - z} \cdot V_y \\ R_{1z} &= A e^{-C_1 t - z} \cdot \phi & S_{1z} &= -\frac{2C}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-C_1 t - z} \cdot \phi \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

S-2に於いては次式が(2.10)式の解である。 S のみを示す。

$$\left. \begin{aligned} S_{2x} &= \frac{2C}{\mu} \frac{B}{C_2} e^{-C_2 t - z} \cdot H_x + \text{const.} \\ S_{2y} &= \frac{2C}{\mu} \frac{B}{C_2} e^{-C_2 t - z} \cdot H_y + \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

未定係数 B は次式で決定される。

$$BC_1 = AC_2 \quad (4.3)$$

$l = l', \Omega = 1$ の場合の梁の鉛直撓み(中立軸) δ は、

$$\delta = -\frac{C_0}{C_1} \frac{C_2}{C} M \{ \ln 2x - k C_0 2x - (1-k) \} \quad (4.4)$$

詳しい数値計算例は講演会当日に示すが、筆者の理論が妥当であることをお認め頂ければ幸である。最後に流体力学について御教示頂いた中央大学林泰造教授に感謝申上げる。(33.4.30)