IV-135　土木測量用の新しい観測方程式

広島工業大学　正員　岡野兼夫

斜距離，斜角を新しい観測方程式にして，2〜4 km以内の小地域に適した3次元測量を可能ならしめると共に，同じ方程式が水平距離と水平角にも適用されるように仕組み，平面座標に関しては，従来の平面測量用観測方程式（地理院方式）と同等以上の精度が出ることを確かめた。与点2点の3次元後方交会法など新しい各種の測量方式が可能となるので，これらを実測によって検証し，おおむね所期の成果を収めることができた。

1. 観測方程式編成の基本方針

1) 観測値 φ_i の最確値 $\bar{\varphi}_i$ を各測点の最確座標値 $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ を用いて演算しうる「最確値式」$\bar{\varphi}_i = F(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$ 要。

2) 各測点の略近座標値 X_i, Y_i, Z_i（既知）に対する修正量を x_i, y_i, z_i とすれば，最確座標値を $\bar{X}_i = X_i + x_i$，$\bar{Y}_i = Y_i + y_i$，$\bar{Z}_i = Z_i + z_i$ と表わすことができるので，これらを「最確値式」へ代入して「最確値関数」$\bar{\varphi}_i = f(x_i, y_i, z_i)$ を作る。

3)「最確値関数」へ $x_i = y_i = z_i = 0$ を代入した値を「略近関数値」φ_{0i} として，「最確値関数」を x_i, y_i, z_i につきTaylor展開する。このとき x_i, y_i, z_i の2次以上の部分，および第2次導関数以上の高次項を無視すれば

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_{0i} + \sum\left\{\left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial x_i}\right)_0 \cdot x_i + \left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial y_i}\right)_0 \cdot y_i + \left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial z_i}\right)_0 \cdot z_i\right\} \qquad (1)$$

4) 一方 $\bar{\varphi}_i$ を観測値 φ_i とその補正量 v_i で示せば　$\bar{\varphi}_i = \varphi_i + v_i$　(2)

式(2)を式(1)へ代入して整理すれば，（導関数の添字 $_0$ は $x_i = y_i = z_i = 0$ を入れて値を定める意）

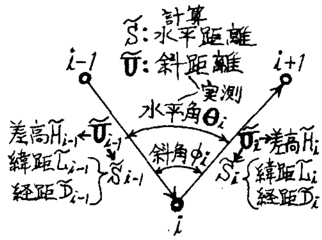
$$(\varphi_i - \varphi_{0i}) + v_i = \sum\left\{\left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial x_i}\right)_0 \cdot x_i + \left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial y_i}\right)_0 \cdot y_i + \left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial z_i}\right)_0 \cdot z_i\right\}$$

5) こうして観測方程式(3)を得る。

$$v_i = \sum\left\{\left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial x_i}\right)_0 \cdot x_i + \left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial y_i}\right)_0 \cdot y_i + \left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial z_i}\right)_0 \cdot z_i\right\} - (\varphi_i - \varphi_{0i}) \qquad (3)$$

係数 $\left(\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial x_i}\right)_0$ 等の内容は，略近座標計算に用いた経距，緯距，差高をそのまま使用できる形にまとめ，z_i 項を省略すれば簡単に平面上の方程式となるように仕組む。

2. 斜角の観測方程式



空間2直線が1点 i に会合して成す斜角 ϕ_i を直接測定する機械が無いので，次式(4)で $\cos\phi_i$ を計算し，$\cos\phi_i$ の数値を観測値とみなす。

$$\cos\phi_i = -\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 \cdot \cos\theta_i \qquad (4)$$

β_1:$(i-1)$から i を見た高度角，β_2: i から$(i+1)$を見た高度角，θ_i: i における実測水平角

β は成るべく水平角と同等の精度で測定し，水平より上方をプラス，水平より下方をマイナスとする。

$\cos\bar{\phi}_i$ すなわち「$\cos\phi_i$ の最確値式」は次の通りである。$\bar{X} = X + x$，$\bar{Y} = Y + y$，$\bar{Z} = Z + z$ とする。X,Y,Z は略近座標値。

$$\cos\bar{\phi}_i = \frac{(\bar{X}_{i-1} - \bar{X}_i)(\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i) + (\bar{Y}_{i-1} - \bar{Y}_i)(\bar{Y}_{i+1} - \bar{Y}_i) + (\bar{Z}_{i-1} - \bar{Z}_i)(\bar{Z}_{i+1} - \bar{Z}_i)}{\left\{\sqrt{(\bar{X}_{i-1} - \bar{X}_i)^2 + (\bar{Y}_{i-1} - \bar{Y}_i)^2 + (\bar{Z}_{i-1} - \bar{Z}_i)^2}\right\}\left\{\sqrt{(\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i)^2 + (\bar{Y}_{i+1} - \bar{Y}_i)^2 + (\bar{Z}_{i+1} - \bar{Z}_i)^2}\right\}} \qquad (5)$$

式(5)の右辺の最確座標値の代りに略近座標値を用いた「略近関数値」$\cos\phi_{0i}$ は，X座標差が緯距L，Y座標差が経距D，Z座標差が差高Hであることに注目して（上図参照）L，D，Hの符号は図の矢印方向による。

$$\cos\phi_{0i} = \frac{-(L_{i-1} \cdot L_i) - (D_{i-1} \cdot D_i) - (H_{i-1} \cdot H_i)}{U_{i-1} \cdot U_i}, \quad \left.\begin{aligned} U_{i-1} &= \sqrt{L_{i-1}^2 + D_{i-1}^2 + H_{i-1}^2} \\ U_i &= \sqrt{L_i^2 + D_i^2 + H_i^2} \end{aligned}\right\} \text{計算斜距離} \qquad (6)$$

実測斜距離 $\tilde{U}$ から水平距離 $\tilde{S}$ および差高 $\tilde{H}$ を求めるには次式による。（Z_0: 平均標高，r: 地球中等半径，m: 縮尺係数，β: $\tilde{U}$ の高度角）

$$\tilde{S} = \tilde{U}\left(1 - \frac{Z_0}{r}\right) m \cdot \cos\beta, \quad \tilde{H} = \tilde{U}\left(1 - \frac{Z_0}{r}\right) m \cdot \sin\beta$$

緯距$\tilde{L}$，経距$\tilde{D}$は$\tilde{S}$と水平角を用いて計算され，$\tilde{L}$からX，$\tilde{D}$からY，$\tilde{H}$からZすなわち略近座標が計算される。したがって略近座標計算ルート上の路線では，式(6)のL，D，Hは$\tilde{L}$，$\tilde{D}$，$\tilde{H}$に等しくUは$\tilde{U}(1-\frac{Z_0}{r})m$に等しい。しかし略近座標計算ルート以外の路線では$L \neq \tilde{L}$，$D \neq \tilde{D}$，$H \neq \tilde{H}$であり，$U \neq \tilde{U}(1-\frac{Z_0}{r})m$である。一般に，式(6)の$L$，$D$，$H$，$U$は略近座標値から下式によって計算されなければならない。

$$\begin{cases} L_{i-1}=X_i-X_{i-1} & D_{i-1}=Y_i-Y_{i-1} & H_{i-1}=Z_i-Z_{i-1} & U_{i-1}=\sqrt{L_{i-1}^2+D_{i-1}^2+H_{i-1}^2} \\ L_i=X_{i+1}-X_i & D_i=Y_{i+1}-Y_i & H_i=Z_{i+1}-Z_i & U_i=\sqrt{L_i^2+D_i^2+H_i^2} \end{cases} \qquad (6)'$$

［注］実測斜距離に対し，上記のように海面補正と縮尺係数を考えないと，国土地理院の基準点に準拠した3次元測量は不可能である。ただし，これによって標高$\bar{Z}$に若干の系統誤差を生じることは止むを得ないが，差高が距離にくらべて小さい場合は，この標高系統誤差は無視してよい。高度角が大きく差高大なる場合は，最確$\bar{Z}$座標差に$(1+\frac{Z_0}{r})/m$を乗じ，標高を改算すれば完全となる。

式(5)へ$\bar{X}=X+x$，$\bar{Y}=Y+y$，$\bar{Z}=Z+z$を代入して座標修正量x，y，zについて展開し，最初に述べた一般方針に従いとりまとめた斜角（正しくは斜角のcos）の観測方程式は下記のようである。

$\cos\phi_i$の補正量をV_iとする。V_iはrad.角の観測方程式と同じに取扱うことができる。（実地計算済み）。

$$\begin{aligned} V_i=&\left(\frac{\cos\phi_{0i}}{U_{i-1}^2}L_{i-1}+\frac{L_i}{U_{i-1}\cdot U_i}\right)x_{i-1}+\left(\frac{\cos\phi_{0i}}{U_{i-1}^2}D_{i-1}+\frac{D_i}{U_{i-1}\cdot U_i}\right)y_{i-1}+\left(\frac{\cos\phi_{0i}}{U_{i-1}^2}H_{i-1}+\frac{H_i}{U_{i-1}\cdot U_i}\right)z_{i-1} \\ &-\left\{\left(\frac{L_{i-1}}{U_{i-1}^2}-\frac{L_i}{U_i^2}\right)\cos\phi_{0i}+\frac{(L_i-L_{i-1})}{U_{i-1}\cdot U_i}\right\}x_i-\left\{\left(\frac{D_{i-1}}{U_{i-1}^2}-\frac{D_i}{U_i^2}\right)\cos\phi_{0i}+\frac{(D_i-D_{i-1})}{U_{i-1}\cdot U_i}\right\}y_i-\left\{\left(\frac{H_{i-1}}{U_{i-1}^2}-\frac{H_i}{U_i^2}\right)\cos\phi_{0i}+\frac{(H_i-H_{i-1})}{U_{i-1}\cdot U_i}\right\}z_i \\ &-\left(\frac{L_i}{U_i^2}\cos\phi_{0i}+\frac{L_{i-1}}{U_{i-1}\cdot U_i}\right)x_{i+1}-\left(\frac{D_i}{U_i^2}\cos\phi_{0i}+\frac{D_{i-1}}{U_{i-1}\cdot U_i}\right)y_{i+1}-\left(\frac{H_i}{U_i^2}\cos\phi_{0i}+\frac{H_{i-1}}{U_{i-1}\cdot U_i}\right)z_{i+1}-\left(\cos\phi_i-\cos\phi_{0i}\right) \end{aligned} \qquad (7)$$

式(7)からz_{i-1}，z_i，z_{i+1}の項を除けば，直ちに平面測量用の観測方程式として用いることができる。ただし

$\cos\phi_{0i}$の代りに$\cos\theta_{0i}=\dfrac{-(L_{i-1}\cdot L_i)-(D_{i-1}\cdot D_i)}{S_{i-1}\cdot S_i}$，$\begin{cases} S_{i-1}=\sqrt{L_{i-1}^2+D_{i-1}^2} \\ S_i=\sqrt{L_i^2+D_i^2}\end{cases}$，を用い，$U_{i-1}$，$U_i$をそれぞれ$S_{i-1}$，$S_i$で置きかえ，$\cos\phi_i$の代りに$\cos\theta_i$（$\theta_i$は実測水平角）を使用すべきことは当然である。

重み　水平角の重みを1とすれば

$\cos\theta_i$方程式の重み $P_{\cos\theta_i}=\dfrac{1}{\sin^2\theta_i}$

差高H_i方程式の重み --（平面座標と別に標高調整する場合，方程式は省略）

$$P_{H_i}=\frac{\tilde{U}_i^2\cdot m^2}{(\sin\beta_i)^2\cdot M_U^2+\tilde{S}_i^2\cdot M_\beta^2}$$

m：水平角の標準誤差rad
M_β：高度角の標準誤差rad
M_U：斜距離の標準誤差

$\cos\phi_i$方程式の重み $$P_{\cos\phi_i}=\frac{1}{\{(\sin\beta_2\cos\beta_1-\cos\beta_2\sin\beta_1\cos\theta_i)^2/P_1\}+\{(\sin\beta_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\theta_i)^2/P_2\}+(\cos\beta_1\cos\beta_2\sin\theta_i)^2}$$

3、斜距離の観測方程式

$\bar{U}$すなわち「斜距離$\bar{U}$の最確値式」は次の通り。　$\bar{X}=X+x$，$\bar{Y}=Y+y$，$\bar{Z}=Z+z$とする。

$$\bar{U}_i=\sqrt{(\bar{X}_{i+1}-\bar{X}_i)^2+(\bar{Y}_{i+1}-\bar{Y}_i)^2+(\bar{Z}_{i+1}-\bar{Z}_i)^2} \qquad (8)$$

$i \xrightarrow{\text{実測斜距離}\tilde{U}_i} i+1$

X，Y，Zは略近座標値

この右辺の最確値座標の代りに略近値座標を用いた「略近関数値」U_{0i}は

$$U_{0i}=\sqrt{(X_{i+1}-X_i)^2+(Y_{i+1}-Y_i)^2+(Z_{i+1}-Z_i)^2}=\sqrt{L_i^2+D_i^2+H_i^2} \qquad (9)$$

式(8)へ$\bar{X}=X+x$，$\bar{Y}=Y+y$，$\bar{Z}=Z+z$を代入して座標修正量x，y，zについて展開し，とりまとめた斜距離の観測方程式は（実測斜距離$\tilde{U}_i$の補正量を$\tilde{v}_i$とする）。

$$\tilde{v}_i=\frac{-(X_{i+1}-X_i)}{U_{0i}}x_i+\frac{-(Y_{i+1}-Y_i)}{U_{0i}}y_i+\frac{-(Z_{i+1}-Z_i)}{U_{0i}}z_i+\frac{(X_{i+1}-X_i)}{U_{0i}}x_{i+1}+\frac{(Y_{i+1}-Y_i)}{U_{0i}}y_{i+1}+\frac{(Z_{i+1}-Z_i)}{U_{0i}}z_{i+1}-(\tilde{U}_i-U_{0i}) \qquad (10)$$

角の観測方程式といっしょに使用するために両辺をU_iで割り，$v_i=\tilde{v}_i/U_i$と置く。

$$v_i=\frac{-(X_{i+1}-X_i)}{U_{0i}^2}x_i+\frac{-(Y_{i+1}-Y_i)}{U_{0i}^2}y_i+\frac{-(Z_{i+1}-Z_i)}{U_{0i}^2}z_i+\frac{(X_{i+1}-X_i)}{U_{0i}^2}x_{i+1}+\frac{(Y_{i+1}-Y_i)}{U_{0i}^2}y_{i+1}+\frac{(Z_{i+1}-Z_i)}{U_{0i}^2}z_{i+1}-\left(\frac{\tilde{U}_i-U_{0i}}{U_{0i}}\right) \qquad (11)$$

zの項を省略し，$\tilde{U}_i$の代りに$\tilde{S}_i=\tilde{U}_i(1-\frac{Z_0}{r})m\cdot\cos\beta_i$を，$U_{0i}$の代りに$S_{0i}=\sqrt{L_i^2+D_i^2}$を用いれば，水平距離の観測方程式として平面解に適用できる。

重み　$\tilde{U}_i$方程式の重み $P_{U_i}=\dfrac{\tilde{U}_i^2\cdot m^2}{M_U^2}$，　$\tilde{S}_i$方程式の重み $P_{S_i}=\dfrac{\tilde{U}_i^2\cdot m^2}{(\cos\beta_i)^2\cdot M_U^2+\tilde{H}_i^2\cdot M_\beta^2}$

［応用］式(7)から得られる$\cos\phi_i$方程式と$\cos\theta_i$方程式は全く別の方程式として連立できるので，与点2点の後方交会で求点の$\bar{X}$，$\bar{Y}$，$\bar{Z}$を求めるなど多くの応用が可能。