Ⅳ-57　断面交通量によるOD表の推計

岡山大学工学部　正員　井上博司

1．はじめに

道路網上の断面交通量が与えられたときに，これをもとにしてOD表を推計する方法がこれまで2，3提案されてきた。これは道路網の合理的な運用を図るために，OD交通量を正確に把握する必要があるためである。しかし今までの方法では明解な理論的根拠がないため，推計値の信頼性が問題である。本稿ではこれを統計学的に取り扱うことを試み，一般に統計的推定においてよい推定値が得られるといわれる最尤法によりOD表を推計する方法を述べる。

2．OD交通量の確率分布

一般にOD表は1日交通量として与えられるが，毎日同じだけのOD交通量が存在しているわけではない。OD交通量は日に日に異なった値をとっており，したがってそれは何等かの確率分布にしたがうと考えられる。いまODペアーiについて，ある1日のOD交通量を確率変数X_iで表わし，またある相当の期間にわたるOD交通量の平均値をS_iとしよう。このときOD交通量X_iの確率分布はS_iを平均値とし，分散がS_iの正規分布にしたがうと考えることができる。

なぜなら，いまT日間のOD交通量を考え，これをN_iとしよう。ここでN_iトリップの中のどの1トリップもある特定の1日に起る確率は$p=1/T$であるとすると，ある特定の1日にOD交通量がX_iになる確率は，

$$P(X_i)=\binom{N_i}{X_i}p^{X_i}(1-p)^{N_i-X_i} \qquad (1)$$

である。この2項分布の平均値は$N_ip=N_i/T$，分散は$N_ip(1-p)=N_i\cdot\frac{1}{T}(1-\frac{1}{T})$となるが，Nは相当の期間について考えているので，分散はほぼN_i/Tに等しい。したがってOD交通量の分散はほぼ平均値に等しいと考えられる。

よってたとえばOD交通量が100であるとすると，標準偏差は10したがって変異係数は0.1であるが，OD交通量が10 000であると標準偏差は100，変異係数は0.01となる。すなわち平均OD交通量の値が大きいほど，OD交通量の相対的バラツキは小さくなるという重要な性質が導かれる。

ところで2項分布についてはN_iが十分大きいと正規分布で近似できるという性質がある。実際問題としてはN_iが20～30もあれば十分であるから，たいていの場合正規分布への近似が許されよう。したがってOD交通量X_iはほぼ平均値S_i，分散もS_iの正規分布にしたがうと考えられる。よってその確率密度関数は次のようになる。

$$f_i(X_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi S_i}}e^{-\frac{(X_i-S_i)^2}{2S_i}} \qquad (2)$$

3．最尤法によるOD交通量の推定

一般に，ある量の推定値を得るためには，情報の量が多ければ多いほど正確な推定値が得られることはいうまでもない。そこでいま平均OD交通量の値を推定するために，道路網上の各道路区間で1日の交通量が観測されたとしよう。道路区間jでの観測断面交通量をQ_jとする。またOD調査によってOD交通量が求められているとしよう。このOD表におけるOD iに関するOD交通量をD_iとしよう。もしOD調査がサンプリング調査であるなら標本誤差が問題となるが，ここでは標本誤差はないものとし，このOD表がある1日のOD交通量の実現値を表わすものであると考えよう。

さらに各ODに対して，トリップが起終点間のいくつかの経路を選択する割合がわかっているとしよう。OD

iの交通がOD iのk番目の経路を選択する割合をp_{ik}とする。もちろん $\sum_k p_{ik}=1$ である。またこの経路が道路区間jを経由するとき1，経由しないとき0と定めた係数をr_{ikj}とする。

いま断面交通量が観測された日におけるOD交通量をY_iとしよう。Y_iは観測されていないから未知数である。ここで重要なことは，OD調査による交通量D_iも，断面交通量観測時の交通量Y_iも1つの実現値にすぎないということである。そこでOD調査によってOD交通量がD_i ($i=1,2,\cdots\cdots,\ell$)，断面交通量観測時にOD交通量がY_i ($i=1,2,\cdots\cdots,\ell$) となる同時確率密度を求めると，次のようになる。

$$\begin{aligned} P &= \prod_i f_i(D_i)\, f_i(Y_i) \\ &= \prod_i \frac{1}{2\pi S_i}\, e^{-\frac{1}{2S_i}\left\{(D_i-S_i)^2+(Y_i-S_i)^2\right\}} \end{aligned} \tag{3}$$

ただし断面交通量調査時点では次式が成り立たなければならない。

$$\sum_i \sum_k Y_i\, p_{ik}\, r_{ikj} = Q_j \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,m) \tag{4}$$

ベイズの統計的推論方式にしたがえば，式(4)を満たし，式(3)を最大にするY_i, S_iが実際に起っていると考えてよいわけであるから，式(4)のもとで式(3)を最大にするY_i, S_iの値を求めたとき，S_iの値が最尤推定値である。しかしこの値を求めるのは多少めんどうなので，いまS_iがOD調査によって求められた値D_iに近いであろうと考えると，式(3)のかわりに，

$$\begin{aligned} P &\cong \prod_i \frac{1}{2\pi D_i}\, e^{-\frac{1}{2D_i}\left\{(D_i-S_i)^2+(Y_i-S_i)^2\right\}} \\ &= \left(\prod_i \frac{1}{2\pi D_i}\right) e^{-\sum_i \frac{1}{2D_i}\left\{(D_i-S_i)^2+(Y_i-S_i)^2\right\}} \end{aligned} \tag{5}$$

を最大化すればよい。式(5)を最大化するのは，その指数部

$$F = \sum_i \frac{1}{D_i}\left\{(D_i-S_i)^2+(Y_i-S_i)^2\right\} \tag{6}$$

を最小化するのと同等である。

ラグランジェの未定乗数法により，制約条件(4)のもとで目的関数(6)を最小にするS_i, Y_iの値を求めると，

$$S_i = D_i + \frac{D_i}{2}\left(\sum_j \lambda_j \sum_k p_{ik} r_{ikj}\right) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,\ell) \tag{7}$$

$$Y_i = D_i + D_i\left(\sum_j \lambda_j \sum_k p_{ik} r_{ikj}\right) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,\ell) \tag{8}$$

となる。ただし未定乗数λ_jは次式を満足しなければならない。

$$\sum_{j'} \lambda_{j'}\left(\sum_i \sum_k \sum_{k'} p_{ik}\, p_{ik'}\, r_{ikj}\, r_{ik'j'}\right) = Q_j - \sum_i \sum_k p_{ik}\, r_{ikj}\, D_i \qquad (j=1,2,\cdots,m) \tag{9}$$

式(9)より未定乗数λ_jを求め，これを式(7)に代入することによって平均OD交通量の最尤推定値をうる。

4. おわりに

この方法ではOD交通量の確率分布における分散が問題である。本稿では分散が平均値と一致すると仮定したが，これはトリップの発生がかなりランダムな場合，したがって業務交通や自由目的トリップにはこの仮定は妥当であろう。通勤交通の場合には分散はもっと小さくなると思われるが，その場合でも分散はやはり平均OD交通量に比例すると考えられるので，結局は同じ式で推計することができる。

なおこの推計法の計算例については講演時に発表する。