Ⅳ－35　　道路網における需要－供給均衡流の推定法（その２）

岐阜大学大学院　学生員　佐藤祐二
岐阜大学工学部　正会員　宮城俊彦
岐阜大学工学部　正会員　加藤　晃

1.まえがき

近年、均衡流の計算法には、各種の数理最適化手法を導入したものが多くみられるようになってきた。本研究も、その流れに沿うもので、Beckmannモデル[1]に基づく均衡流の計算法を提示している。ここでいう均衡流とは、Wardropの等時間原則を満たす流れのことであり、その推定法には二つの考え方がある。その一つは、OD需要が固定されている場合であり、従来提案されている等時間配分として定式化される。他の一つは需要一供給均衡原理に基づくものである。その際、OD需要はOD間のサービスレベルの関数として取り扱われる。本研究は後者の立場をとるもので、変数としてパスフローを用いて、Beckmannモデルを定式化している。ここで提案するアルゴリズムの特徴は、一階の傾斜法を利用していることであり、また大規模ネットワークに適用可能なように、最短経路探索の回数をできるだけ少なくするよう工夫を加えた点である。

2.需要一供給均衡問題の定式化

いま、ODペアiのOD交通量がその所用時間t^iの関数$g^i(t^i)$で表わされると仮定する。そしてODペアiのパスkを流れる交通量をx_k^i、パスの数をn^i、ODペアの数をs、アークの数をmとすると、パスフローの和は、OD交通量に等しくなければならないから、

$$\sum_k x_k^i = g^i(t^i) \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,s) \tag{1}$$

が成立する。アークjを流れる交通量X_jは、パスフロー、パスマトリックスを用いて次のように表わされる。

$$X_j = \sum_i \sum_k \delta_{kj}^i x_k^i \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,m) \tag{2}$$

ここに、

$$\delta_{kj}^i = \begin{cases} 1\,; \text{アーク}j\text{がODペア}i\text{のパス}k\text{に含まれるとき、} \\ 0\,; \text{アーク}j\text{がODペア}i\text{のパス}k\text{に含まれないとき。} \end{cases}$$

また、パスフローはもちろん非負でなければならないので、

$$x_k^i \geqq 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots\cdots,s \\ k=1,2,\cdots\cdots,n^i \end{pmatrix} \tag{3}$$

ここで、Beckmannモデルによればこの均衡問題は、制約条件(3)のもとで次の目的関数を最大化する問題となる。

$$\max F = \sum_i \int_0^{g^i} W^i(y)\,dy - \sum_j \int_0^{X_j} f_j(x)\,dx \tag{4}$$

ところで、$W^i(g^i)$は需要関数$g^i(t^i)$の逆関数であり、$f_j(X_j)$はアークjの供給関数（走行時間関数）である。一般に、需要関数$g^i(t^i)$は単調減少関数であり、供給関数$f_j(X_j)$は単調増加関数である。式(1)(2)より、目的関数Fのx_k^iに関する偏微分をとると次のようになる。

$$\frac{\partial F}{\partial x_k^i} = W^i(g^i) - \sum_j \delta_{kj}^i f_j(X_j) \tag{5}$$

さらに、制約条件(3)のもとで目的関数Fを最大化する問題のKuhn－Tucker条件を考えてみると、最適点では次の式が成立しなければならない。

$$W^i(g^{i*}) - \sum_a \delta_{ka}^i t_a(X_a^*) = 0 \qquad x_k^{i*} > 0 \text{ の場合} \tag{6}$$

$$W^i(g^{i*}) - \sum_a \delta_{ka}^i t_a(X_a^*) \leqq 0 \qquad x_k^{i*} = 0 \text{ の場合} \tag{7}$$

式(6)(7)は等時間原則の数学的表現である。以上のことより、制約条件(3)のもとで目的関数Fを最大化すれば、需要一供給均衡解を求めることができる。

3.需要一供給均衡流の計算法

計算には、従来制約条件なしの最適化問題に使用される一階の傾斜法を修正して用い、最短経路探索を行いながら出現する経路に対応するパスフローを変数の中に組み入れていくという方法を採用した。計算の手順は次のようである。

(1) パスフローの初期値を決定する。

(2) すべてのODペアについて最短経路探索を行い、出現した経路がすでに求まっているもの以外ならその経路を記憶し、その経路に対応するパスフローを変数の中に組み込む。

(3) $\frac{\partial F}{\partial x_k^i}$の値を計算し、$x_k^i = 0$かつ$\frac{\partial F}{\partial x_k^i} \leqq 0$となる$x_k^i$を取り除く。

(4) (3)で取り除かれた以外のx_k^iに対して、$\left|\frac{\partial F}{\partial x_k^i}\right| \leqq \varepsilon$の判定を行う。判定規準を満たすならば計算を終了し、そうでない場合は、次のステップに移る。εを前もって決定した微小な値である。

(5) 目的関数Fを最大にするようなx_k^iの増分Δx_k^iを求める。

(6) (5)より新しいx_k^iを決定する。ただし、$x_k^i + \Delta x_k^i \leqq 0$の場合は$x_k^i = 0$とする。

(7) 各アークの所要時間を修正し、(2)へもどる。

上記のアルゴリズムで、少し問題となるのは、(2)の最短経路探索である。このような計算法では、新しい経路が出現するかしないかにかかわらず、毎回最短経路探索を行わなければならない。しかし数値実験から、計算の後半にはほとんど新しい経路が出現しないので、非常に非効率であることが判明した。そこで、最短経路探索の回数をより少くするために、次のような方法を考えてみた。

いま、目的関数Fをパスフローx_k^iで偏微分したもの、すなわち$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}$の符号に注目してみると、$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}$の符号が正の場合には、そのパスフローは増加し、$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}$の符号が負の場合には減少するのである。このことより、あるODペアで第一次経路だけが出現している場合、その$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}$の符号が正であれば、その経路にはまだ交通量を負荷できることを意味する。よって、最短経路探索を行わずそのままそのパスフローを増加させる。やがて、第一次経路に対応する$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}$の符号は反転して負になる。そのとき第二次経路の出現を確めるため、最短経路探索を行う。第二次経路まで出現している場合も同様で、$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}$の符号が正のものがあれば最短経路探索を行わない。以上のことをまとめれば、最短経路探索を行うのは各ODペアにおいて、$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}$の符号がすべて負のときである。

4.あとがき

本研究は、需要一供給関数を設定し、変数にパスフローを選んで均衡流を推定する計算法を提案したが、以下まとめて特徴を掲げる。

(1) 本研究の手法は、パスフローを変数としたため、中間ノードにおける連続条件を考慮する必要がない。また、結果としてフローパターンが明確である。

(2) ヒューリスティックな方法ではあるが、最短経路探索の回数を減少させるよう、アルゴリズムに工夫を加えたことは、大規模ネットワークにおいて計算時間短縮の面で、利点があると思われる。

なお、計算結果は当日発表する。

参考文献

(1) Beckmann, M.J., McGuire, C.B. and Winsten, C.B., (1956) "Studies in the Economics of Transportation" Yale University Press.