IV-33　多種モード混合の最適ネットワークフロー問題

名古屋工業大学　正員　松井　寛

1. まえがき

本研究では、道路上におけるリンク走行費用や経路選択基準を異にする2つ以上の異なるタイプの車（以下これらをモードと呼ぶ）が同一の道路ネットワークを共用する場合の最適フロー問題を取り扱う。具体的にはモード間の最適分担とモードごとの配分パターンを同時に決定するモデルとして定式化される。

2. 問題の定式化

ネットワークフローの最適化の評価基準として、ここでは輸送人時間最小化基準を取り上げる。説明の都合上モード数を2に限定し、モードの経路選択基準としては、等時間原則配分と総走行時間最小化の代表的な配分原則を考える。即ち、モード1の車は等時間原則に、またモード2の車は総走行時間最小化原則に従うものとする。

さて、いま対象とするネットワークはℓ個のリンクから成り、このネットワーク上をn種のODパーソントリップが分布する状態を考える。いま

N_i：才i番目のODトリップ数（$i = 1, 2, \cdots, n$）

x_i：モード1を利用する才i番目のODトリップ数

y_i：モード2を利用する才i番目のODトリップ数

x_i^k：x_iのうち経路kを利用するトリップ数

y_i^k：y_iのうち経路kを利用するトリップ数

t_{xj}：リンクj上でモード1を利用するトリップ数
　（$j = 1, 2, \cdots \ell$）

t_{yj}：リンクj上でモード2を利用するトリップ数

C_{xj}：リンクj上でモード1を利用したときの1トリップ当りの走行時間

C_{yj}：リンクj上でモード2を利用したときの1トリップ当りの走行時間

とおく。C_{xj}, C_{yj}は一般に経路j上の交通量の関数形として表わされる。

さて、総走行時間最小化基準に基づく通常の最適フロー問題は一般に次のように定式化される。

OD保存条件	$\sum_k x_i^k + \sum_k y_i^k = N_i$	(1)
非負条件	$x_i^k \geq 0$,　$y_i^k \geq 0$	(2)
の下で	$F = \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij}^k (x_i^k C_{xj} + y_i^k C_{yj})$	(3)
を最小化せよ。		

ここにδ_{ij}^kはリンクjがi番目のOD間の経路k上に含まれる場合は1，含まれない場合は0の値をとる変数である。

次に各モードの経路選択パターンについての条件式を考えてみよう。まずモード1は前述のとおり等時間原則に従い、これは次に示す最小化問題として定式化できる。

条件式	$\sum_k x_i^k = x_i$	(4)
及び	$x_i^k \geq 0$	(5)
の下で	$F_x = \sum_j \int_0^{t_{xj}} C_{xj}(x)\,dx$	(6)
を最小化せよ。		

一方モード2は総走行時間最小化に従い、これも以下のような最小化問題として定式化できる。

条件式	$\sum_k y_i^k = y_i$	(7)
及び	$y_i^k \geq 0$	(8)
の下で	$F_y = \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij}^k y_i^k C_{yj}$	(9)
を最小化せよ。		

本問題の究極の目的はネットワーク上での全モードによる総走行時間最小化であり、この意味において、(1)，(2)，(3)式で与えられる問題をセンター最適化問題と呼ぶのに対して、(4)，(5)，(6)式及び(7)，(8)，(9)式で与えられる問題は、モード1，2に関するローカル最適化問題と呼ぶことができる。センター最適化問題はモード間の最適分担を通じて各ローカル最適化問題に制約をかしており、一方ローカル最適化問題は、与えられたモード分担の下での各モードの経路配分パターンを決定する役割を果す。経路配分の結果はリンク走行時間への影響を通してセンター最適化問題に干渉する。この意味において、ローカル最適化問題はセンター最適化問題の制約条件とみることができる。また2つのローカル最適化問題も相互に無関係ではなく、リンク走行時間への影響を通して相互に干渉し合う。

以上のように、センター、ローカル最適化問題から

成る2レベルの最適化過程は，全体で1つの最適化問題を構成しており，従ってこれを一体的に解く必要がある．

3．解法

モード1に関するローカル最適化問題は，ラグランジュ関数に変換でき，その結果クーンタッカーの定理により，問題は次の条件式と等価となる．

$x_i^k > 0$ のとき　$\sum_j \delta_{ij}^k c_{xj} - \lambda_i = 0$　(10)

$x_i^k = 0$ のとき　$\sum_j \delta_{ij}^k c_{xj} - \lambda_i \geqq 0$　(11)

更に　$-\sum_k x_i^k + x_i = 0$　(12)

ここに λ_i は(4)式課したラグランジュ乗数である。

一方モード2に関するローカル最適化問題も同様に次の条件式に置き換えられる．

$y_i^k > 0$ のとき　$\sum_j \delta_{ij}^k (c_{yj} + y_i^k c'_{yj}) - \mu_i = 0$　(13)

$y_i^k = 0$ のとき　$\sum_j \delta_{ij}^k (c_{yj} + y_i^k c'_{yj}) - \mu_i \geqq 0$　(14)

更に　$-\sum_k y_i^k + y_i = 0$　(15)

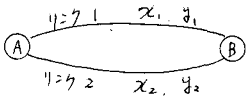
ここに μ_i は(7)式に課したラグランジュ乗数，c'_{yj} は c_{yj} の y_i^k に関する1次導関数を表わす．

以上のようにモード1，2に関するローカル最適化問題がそれぞれ(10)～(12)式，(13)～(15)式と等価となるから，これらをセンター最適化問題の制約条件として新たに追加すれば，結局問題は，(1)，(2)式，(10)，(11)式及び(13)，(14)式の下で目的関数(3)を最小化する問題に帰着する。

上述の定式化では，モード1が等時間原則配分に，モード2が総走行時間最小化原則配分にそれぞれ従うと仮定したが，その他の組合せでも同様であり，またモード数が3以上でも本質的には変わらない．いずれにしても問題は一般に非線形最適化問題となり，その解法として非線形計画法の手法が適用できる。

4．計算例

計算例として線形走行時間関数を仮定した簡単なネットワークフローの最適化を考えよう。線形走行時間関数の導入により問題は2次計画法の問題となる。図-1に示す簡単なネットワーク上の1ODフローの最適化を考える。

図-1.


モード1として乗用車，モード2としてバスを想定しモードごとに以下の線形走行時間関数を仮定する。

$$c_{xj} = a_{xj} t_j + b_{xj}, \quad c_{yj} = a_{yj} t_j + b_{yj}, \quad (j = 1, 2) \qquad (16)$$

いま自由走行時の乗用車の速度を40km/h，バスの速度を20km/h，リンク1，2の容量を2000台/h（乗用車換算）として，リンク交通量が容量に一致したときの速度を乗用車，バスとも10km/hと仮定し，またリンク1，2の延長をそれぞれ10km，11kmとして a_{xj}，b_{xj}，a_{yj}，b_{yj} の値を決定する．また乗用車，バスの平均乗車人員をそれぞれ1.2人，50人とし，バスの乗用車換算係数を1.75と仮定する．

以上の仮定の下に，ODトリップ数(N)を変化させたときの解を図-2に示す。一方図-3は，モードごとの経路配分に関する制約を考えず，(3)式を(1)，(2)式の条件の下で解いた通常の最適フローの解を示す．

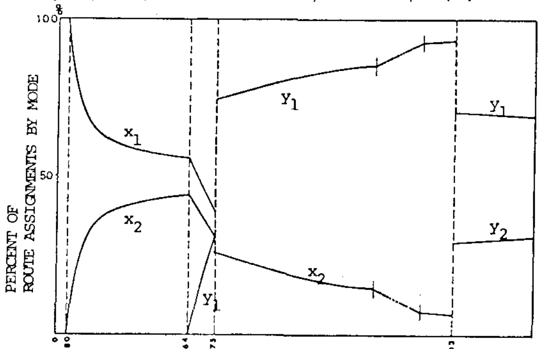


図-2

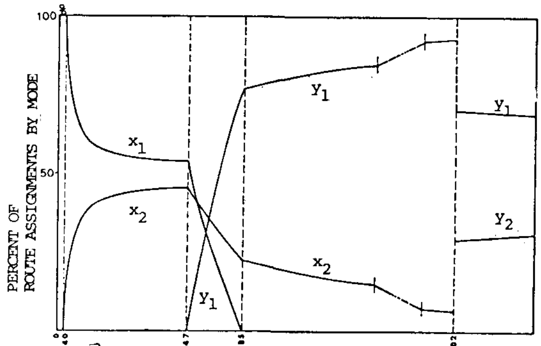


図-3

5．あとがき

ODの数が増えてくると上記の非線形最適化問題を解くことは容易ではない．またネットワーク上で配分経路があらかじめ与えられない場合は，更に経路探索のための計算も必要となる．このような場合には，経路探索と最適フローの計算を逐次繰返す反復計算による方法が考えられよう．