Ⅳ-30 不確実性下における最適交通ネットワークの採択について

神戸大学工学部　正員　　枝村俊郎
神戸大学工学部　正員　○森津秀夫
関西電力　正員　　冨村彰廣

1. はじめに

従来, 最適交通ネットワーク問題においては, 使用するデータの誤差については考慮されていなかった。しかし, 実際の交通網計画で用いる分布交通量のデータには, 一般には無視できない統計的変動が含まれている。すなわち, データが標本であることに基づく誤差, モデルにおいて無視した要因に基づく衝撃誤差などである。このように統計的変動を含んだ分布交通量をデータとして交通ネットワークを決定する問題を考えよう。統計的変動を無視した場合の過大, あるいは過小な施設建設のおそれを明示的に定式化に考慮する。

2. 対象とする最適ネットワーク問題

次の問題を考えてみよう。

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}t_{ij}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{d=1}^{2}P_{kd}(v_{kd}-u_k) \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{k=1}^{m} C_k x_k \leqq C \tag{2}$$

$$x_k=0 \text{ or } 1 \quad (k=1,2,\cdots,m) \tag{3}$$

ここに, g_{ij}：iノードからjノードへのトリップ数, t_{ij}：iノードからjノードへの最短所要時間で, x_kの関数, v_{kd}：kリンク, d方向の交通量, u_k：kリンクの容量, P_{kd}：kリンク, d方向の交通量がリンク容量を越えたときのペナルティーで, $v_{kd}\leqq u_k$ のとき $P_{kd}=0$, $v_{kd}>u_k$ のとき $P_{kd}=P_k$, C_k：kリンクの建設費, x_k：kリンクの状態を表わす0-1変数で, kリンクがネットワークに含まれるとき1, 含まれないとき0, C：ネットワーク建設費の上限, m：リンク数, n：ノード数である。制約はネットワーク建設費のみで, 目的関数はリンクの交通量が容量を越えたときのペナルティーと総所要時間の和の最小化である。なおトリップは最短経路に配分するものとする。ここにg_{ij}は統計的に分布を持つものとする。

従来の解法では, いわばg_{ij}の平均値を使って最適ネットワークを求めていた。だが, たとえ平均値ではリンクの交通量が容量を越えなくとも, 統計的変動を考えれば交通量がある確率で容量を越えることが考えられる。この定式化では, これに対して超過量に比例したペナルティーを与えるのである。ここで, 目的関数を次のようにする。

$$\min Z=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}t_{ij}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{d=1}^{2}P_{kd}(v_{kd}-u_k)\right\} \tag{4}$$

ここに, $E\{\ \}$は$\{\ \}$の期待値を表わす。g_{ij}の平均値を$\bar{g}_{ij}$とすると, 式(4)は次のようになる。

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\bar{g}_{ij}t_{ij}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{d=1}^{2}E\{P_{kd}(v_{kd}-u_k)\} \tag{5}$$

3. アルゴリズム

この問題を解くとき, これまでの最適ネットワーク問題と異なる点が2点ある。まずその第1は, 目的関数の第2項のペナルティーの計算が必要なことで, 第2はさらに分布を持つデータとして取り扱うことである。目的関数値の計算は困難ではないが, 繰り返し計算するので効率的に行わなければならない。また, これまでのアルゴリズム[1]では目的関数の下限値を使用していたが, ペナルティー項についても下限値を求める必要がある。しかし, 交通配分を行わずにリンク交通量を予測することは困難であり, ネットワークからリンクを除くことによってつねにペナルティーの値が増加するとは言えないことなどから, 第1項のように容易に第2項の下限値を求めることはできない。そこで, カットを使用して下限値を求めることを考える。

あるカットによりノードは2つの集合に分けられるが，カットにより分けられたノード間のトリップ数を合計したものがカットの容量である。すなわち，

$$V_{\ell d} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij\ell d}\, g_{ij} \qquad , \qquad U_\ell = \sum_{k=1}^{m} t_{k\ell}\, x_k u_k \qquad (6),\ (7)$$

ここに，$V_{\ell d}$：ℓカット，d方向の交通量の下限値，$\gamma_{ij\ell d}$：iノードからjノードへの経路が必ずℓカットをd方向に横切るとき1，そうでないとき0，U_ℓ：ℓカットの容量，$t_{k\ell}$：kリンクがℓカットに含まれるとき1，含まれないとき0である。さらに，

$$P_\ell = \min\{P_k \mid t_{k\ell}=1,\ x_k=1\} \qquad (8)$$

のように，カットの交通量が容量を越えたときのペナルティーの値を決めると，ℓカットに属するリンクのペナルティーの和の下限値は

$$\sum_{d=1}^{2} P_{\ell d}\,(V_{\ell d}-U_\ell)$$

によって求めることができる。ただし，$P_{\ell d}$は，$V_{\ell d} \leqq U_\ell$ のとき $P_{\ell d}=0$，$V_{\ell d} > U_\ell$ のとき $P_{\ell d}=P_\ell$ である。これを使い，目的関数の第2項の下限値を次のようにして求めることにする。

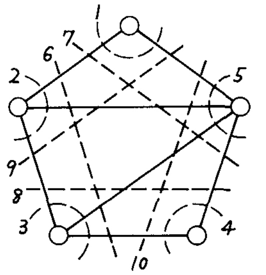
まず，1本のリンクが複数のカットに属することのないカットの集合をいくつかつくる。図－1のネットワークの例では，$\{1, 8\}$，$\{1, 3\}$，$\{1, 4\}$，$\{2, 4\}$ などがこれに相当する。そうすると，あるカットの集合の中では，1本のリンクは複数のカットに属することがないため，目的関数の第2項の下限値は次の式（9），（10）によって求められる。

$$Z_{2s}^{\ell} = \sum_{\ell \in A_s}\sum_{d=1}^{2} P_{\ell d}\,(V_{\ell d}-U_\ell) \qquad (9)$$

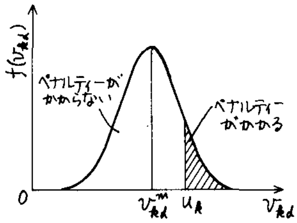
$$Z_2^{\ell} = \max\,(Z_{2s}^{\ell}) \qquad (10)$$

ここに，Z_2^{ℓ}：目的関数の第2項の下限値，A_s：sカット集合である。

したがって，分枝変数に0の値を与えたとき，そのリンクが属しているカットの容量を減じ，第1項の下限値と第2項の下限値の和が目的関数の上限値を越えないかどうかを調べればよい。



図－1　カットの例



図－2　リンク交通量の確率密度関数

g_{ij}に分布をもたせたときに問題になるのも目的関数の第2項だが，この計算は次のようにして行う。

まず簡単のためにg_{ij}の分布は正規分布であるとする。そうすると，g_{ij}の和であるリンク交通量v_{kd}も正規分布になるが，この平均値をv_{kd}^m，分散をv_{kd}^vとする。ペナルティーがかかるのは$v_{kd} > u_k$の部分だが，これを図示すると図－2のようになる。したがって，次の$F_1(x)$，$F_2(x)$なる関数を定義すれば，目的関数の第2項Z_2は簡単に計算することができる。

$$F_1(x)=\int_x^\infty t\,e^{-\frac{t^2}{2}}/\sqrt{2\pi}\,dt \quad , \quad F_2(x)=\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}/\sqrt{2\pi}\,dt \quad , \quad u_{kd}=(u_k-v_{kd}^m)/\sqrt{v_{kd}^v} \qquad (11),\ (12),\ (13)$$

$$Z_2 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{d=1}^{2} P_k\,\{\sqrt{v_{kd}^v}\,F_1(u_{kd}) + (v_{kd}^m - u_k)\,F_2(u_{kd})\} \qquad (14)$$

目的関数の第2項の下限値を計算するとき，g_{ij}が分布をもつならば，やはり期待値を求めなければならないが，上に述べた方法を使用すればよい。

4. おわりに

データの変動を考慮したネットワーク決定問題を定式化したが，このような解法によれば，誤差に基づく決定の誤りを免れることができる。また，この解法はこれまで不明確であった，ＯＤ調査のサンプリングレイト決定の理論的な基礎としても有用であると信ずる。

参考文献　1）枝村俊郎・森津秀夫：最適交通ネットワーク問題の厳密解法と近似解法，土木学会論文報告集，第262号，PP. 39～53，1977年6月