III-97　　変分原理による圧密機構の一考察

京都大学工学部　正員　○田村　武
京都大学工学部　正員　　赤井浩一

1. はじめに

著者らはすでに，線形弾性的な構造骨格と非圧縮性間げき水からなる理想的な飽和粘土の圧密現象が（過剰）間げき水圧のみを唯一の未知数とする単独の方程式で支配されることを示した。[1] 本報告では，変分法の立場とりわけ Prager・Synge の hypercircle method[2] および坂井のいう変分原理[3]の考え方を用いて，ひずみの集合の中における最小ノルム問題（最適問題）としてこの圧密の方程式の意味や間げき水圧のとらえ方について考察する。

2. 間げき水圧のみで表現した Biot の圧密方程式

従来，Biot の方程式はつりあい条件と連続条件を表す二つの部分からなりたっている。構造骨格をなす材料の線形性が仮定されるとき，変形・応力の基準状態を任意に選んでも，つりあい方程式の形は不変であるが境界条件はその値を変える。とくに圧密過程が完全に終了した状態を基準にすれば，変位と応力に関する境界条件が斉次になり，圧密状態におけるひずみ ε_{ij}（あるいは変位）と残存する間げき水圧 u_e の両分布とにつぎのような1対1線形対応が存在する。

$$\varepsilon_{ij}(x) = \int_{V_X} E_{ij}(x, X)\, u_e(X)\, dV_X \tag{1}$$

この式の逆関係に連続条件式を代入すれば間げき水圧のみで表現した圧密の方程式：

$$\frac{\partial u_e}{\partial t}(x,t) = \alpha \int_{V_X} \Phi(x, X)\, \nabla^2 u_e(X,t)\, dV_X \tag{2}$$

が得られる。ここで α は定数である。以上のことからわかるように，圧密の最終状態を基準にしたうえで個々の境界条件まで考慮した変形と間げき水圧との関係式(1)の存在が方程式(2)を導くための基礎となっている。そこで以下に，この基本的な関係式(1)のもつ意味を変分法の立場から考察する。

3. ひずみの集合における幾何学

まず，いくつかのひずみの集合および記号を定義する。（図-1参照）

$\tilde{E}$：すべてのひずみの集合

E：適合条件と与えられた変位境界条件を満たすひずみ（ε）の集合

E_0：適合条件と斉次変位境界条件を満たすひずみ（ε_0）の集合

E^*：つりあい条件と与えられた応力境界条件を満たすひずみ（ε^*）の集合

E_0^*：つりあい条件と斉次応力境界条件を満たすひずみ（ε_0^*）の集合

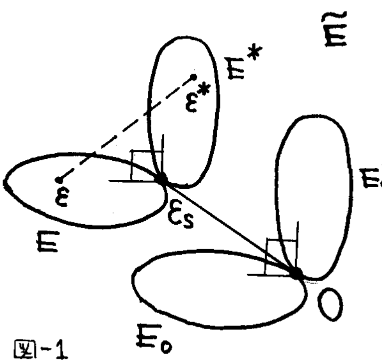


図-1

空間$\tilde{E}$には応力－ひずみ関係　$\sigma = D\varepsilon$　を示すマトリックス　D　を用いて

$$\langle \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)} \rangle = \frac{1}{2}\int_V D_{ijkl}\, \varepsilon^{(1)}_{ij}\, \varepsilon^{(2)}_{kl}\, dV \tag{3}$$

なる内積が定義されており，この内積に関して$\tilde{E}$はHilbert空間をなしていると仮定する。容易にわかるように集合E_0とE_0^*の任意の要素ε_0，ε_0^*は互いに直交していて $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_0^* \rangle = 0$ を満たしている。またE_0とE_0^*とは原点0のみを共通点としてもっている。集合EとE*は，E_0とE_0^*を原点から圧密の最終点ε_sまでそれぞれ平行移動した位置に存在する。通常の弾性問題では点ε_sを求めることが目的であるが，このとき坂井の提案する変分原理を適用すれば，EとE*の点ε，ε^*をそれぞれ独立に動かして（$\varepsilon-\varepsilon^*$）のノルムの二乗を示す汎関数：

$$F(\varepsilon, \varepsilon^*) = \langle \varepsilon-\varepsilon^*, \varepsilon-\varepsilon^* \rangle = \frac{1}{2}\int_V D_{ijkl}(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^*_{ij})(\varepsilon_{kl}-\varepsilon^*_{kl})\, dV \tag{4}$$

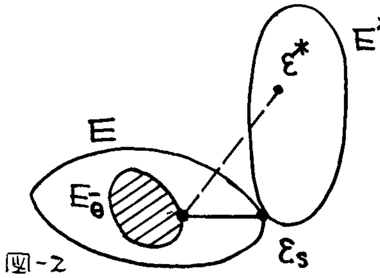
を極値にすることにより，解 $\varepsilon = \varepsilon^* = \varepsilon_s$ が求められる。

4. 変分法による間げき水圧および間げき水圧－変形関係式(1)の意味

圧密中における時々刻々の変形状態は，通常の弾性問題に対して体積ひずみを$\theta = \bar{\theta}$と拘束した問題と考えられる。そこでLagrange乗数$\lambda(x)$を導入して汎関数F（ε，ε^*）を

$$G(\varepsilon, \varepsilon^*, \lambda) = \langle \varepsilon-\varepsilon^*, \varepsilon-\varepsilon^* \rangle - \int_V \lambda(x)\,(\theta(x)-\bar{\theta}(x))\, dV \tag{5}$$

と修正すればよい。実際，$G(\varepsilon, \varepsilon^*, \lambda)$の$\varepsilon$に関する停留条件を求めるとそれがBiotの方程式のつりあい条件式に一致し，しかもLagrange乗数λが間げき水圧u_eに対応していることがわかる。このことは，図－2においてE^*の点ε^*を任意に固定したうえで，$\theta=\bar{\theta}$を満たすEの中の部分集合$E_{\bar{\theta}}$までのノルムを最小にするという意味をもっている。このときε^*としてε_s以外を選んだ場合，ベクトル（$\varepsilon-\varepsilon^*$）は適合条件を満足しない。そのため$\varepsilon_s$が既知であるとして$\varepsilon^*=\varepsilon_s$とする。一方，ひずみ分布$\varepsilon(x)$から一点xの体積ひずみ$\theta(x)$への対応はHilbert空間における有界線形汎関数とみなせるので，Rieszの（内積表現）定理が適用される。以上より，式(5)の$G(\varepsilon,\varepsilon^*,\lambda)$は



図－2

$$H(\varepsilon, u_e) = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle - \int_{V_x} u_e(x)\{2\langle E_x, \varepsilon\rangle - \bar{\theta}\}\, dV \tag{6}$$

と表される。これのεに関する（Fréchet）微分をとれば，さきに記した式(1)が導かれる。つまり式(1)は，Hilbert空間において原点より閉集合までの最小ノルムを与えるベクトルが，その閉集合を定義する拘束ベクトルの一次結合で表現されるという最適制御理論の一つの基本定理[4)]に対応している。また，その各成分の大きさが間げき水圧（Lagrange乗数）に相当しているのである。

参考文献　1)赤井・田村：Biotの方程式とその圧密機構について，第12回土質工学研究発表会講演集，昭52

2) Prager・Synge：Approximation in Elasticity Based on the Concept of Function Space, Q. App. Math., 5, 3, 1947

3) 坂井：力学における変分原理の一般化について，土木学会論文報告集，249，昭.51

4) ルーエンバーガ：関数解析による最適理論，コロナ社，昭.48