

九州大学工学部 正員 後藤恵之輔
 〃 〃 山内 豊聡

1. まえがき

土を弾性体と考えて地盤内の応力や変形を求める問題は、Boussinesq以来幾多の人々により研究されてきている。しかし、それらはほとんどヤング率 E とせん断弾性係数 G との一意的な関係、 $E/G=2(1+\nu)$ (ν :ポアソン比)、に基礎を置くものであり、土のせん断抵抗の変化も考慮に入れることは不可能である。本論では、広義の弾性体であるがヤング率とせん断弾性係数の関係が $E/G > 2(1+\nu)$ であるワイスコフ体¹⁾の考え方に従い、土のせん断抵抗を E/G で表わし得るとして3種の2次元問題を解析し、せん断抵抗が地盤内応力や擁壁土圧に及ぼす影響を明らかにするものである。オ1の問題は地表面上で鉛直荷重を受ける半無限地盤の応力伝播であり、オ2には土を支える剛な水平基盤の一部がわずかに鉛直変位したときの応力状態も求める、いわゆるFinnの問題²⁾を取上げ、さらにこの問題の解を利用して鉛直壁が平行移動するときの弾性土圧を求めて、これをオ3の問題とする。

2. 2次元問題の基本解

ワイスコフ体としての地盤の2次元問題も考える場合には、平面ひずみ状態に対する支配方程式が確立されなければならない。支配方程式は応力のつり合い式、ひずみの適合条件式および応力・ひずみの関係式から誘導されるが、結果は次のとおりである。

$$\nabla^4 \phi = -\frac{K-1}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} \quad (1)$$

ここに、 ϕ : 応力関数、 (x, z) : 直角座標、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ 、 $K = E/G(1+\nu) - 1$ 。

応力関数は式(1)を満足するように求められ、その結果を用いて応力および変位はそれぞれ次のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ S^2 (Ae^{S\lambda z} + Be^{-S\lambda z}) + \lambda^2 (Ce^{S\lambda z} + De^{-S\lambda z}) \} \lambda e^{-i\lambda x} d\lambda \\ \sigma_z &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ A(e^{S\lambda z} + Be^{-S\lambda z}) + C(e^{S\lambda z} + De^{-S\lambda z}) \} \lambda e^{-i\lambda x} d\lambda \\ \tau_{xz} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ S(Ae^{S\lambda z} - Be^{-S\lambda z}) + \lambda(Ce^{S\lambda z} - De^{-S\lambda z}) \} \lambda e^{-i\lambda x} d\lambda \\ u &= \frac{(1+\nu)}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \{ (1-\nu)S^2 + \lambda^2 \} (Ae^{S\lambda z} + Be^{-S\lambda z}) \\ &\quad + \{ (1-\nu)\lambda^2 + \lambda^2 \} (Ce^{S\lambda z} + De^{-S\lambda z}) \} \lambda e^{-i\lambda x} d\lambda \\ w &= -\frac{1+\nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \lambda(1-\nu+\nu S^2) (Ae^{S\lambda z} - Be^{-S\lambda z}) \\ &\quad + S(1-\nu+\nu\lambda^2) (Ce^{S\lambda z} - De^{-S\lambda z}) \} \lambda e^{-i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 $S^2, \lambda^2 = x^2 \delta x + 1$ の根 (ただし $\delta = 2 + (K-1)/(1-\nu)$)、 λ : パラメータ、 $A \sim D$: 境界条件から決定される積分定数。

3. 半無限地盤の応力伝播

図-1の放物線荷重に対する解は、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{4P_0}{(\eta^2-1)\pi a^2} \int_0^\infty \{ (\eta^2 - \frac{1}{2})\lambda z - e^{-\frac{1}{2}(\eta^2-1)\lambda z} \} \frac{\sin \lambda a - \lambda a \cos \lambda a}{\lambda^3} \cos \lambda x d\lambda \\ \sigma_z &= \frac{4\eta P_0}{(\eta^2-1)\pi a^2} \int_0^\infty \{ e^{-S\lambda z} - e^{-\eta \lambda z} \} \frac{\sin \lambda a - \lambda a \cos \lambda a}{\lambda^3} \sin \lambda x d\lambda \\ \tau_{xz} &= \frac{4\eta P_0}{(\eta^2-1)\pi a^2} \int_0^\infty \{ e^{-S\lambda z} - e^{-\eta \lambda z} \} \frac{\sin \lambda a - \lambda a \cos \lambda a}{\lambda^3} \sin \lambda x d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

鉛直応力および最大せん断応力の等値線を図-2に示す。

面応力も E/G の増加すなわちせん断抵抗の低下に伴ない側方へ余り波及せず深部に及ぶようになることが特に指摘される。

図-3に示す線荷重の解は、一様帯荷重に対する解の極限として次のように求められる。

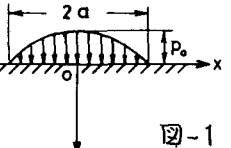


図-1

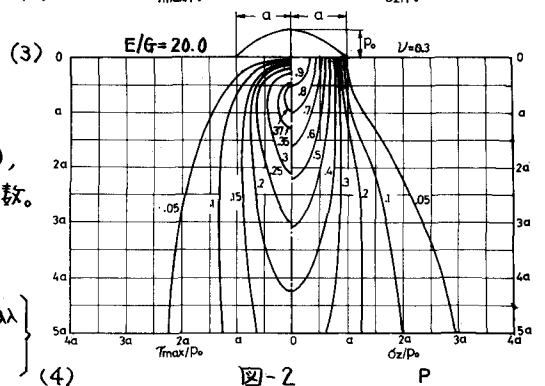
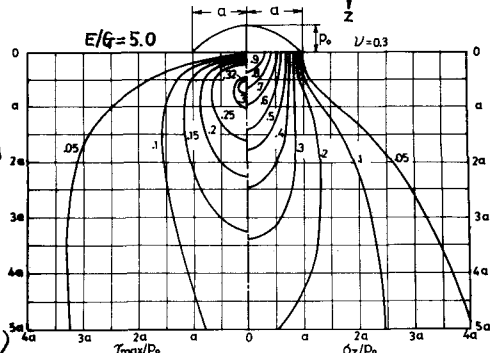


図-2

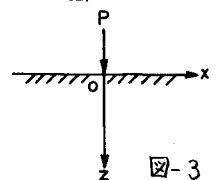


図-3

$$\sigma_x = \frac{P}{(\gamma^2 z^2) \pi} \left(\frac{\gamma^2 z^2}{x^2 + \gamma^2 z^2} - \frac{5z}{x^2 + 5^2 z^2} \right), \quad \sigma_z = \frac{P}{(\gamma^2 z^2) \pi} \left(\frac{\gamma^2 z^2}{x^2 + 5^2 z^2} - \frac{\gamma^2 z^2}{x^2 + \gamma^2 z^2} \right) \quad (5)$$

$$\tau_{xz} = \frac{P}{(\gamma^2 z^2) \pi} \left(\frac{\gamma^2 x}{x^2 + 5^2 z^2} - \frac{\gamma^2 x}{x^2 + \gamma^2 z^2} \right)$$

特に鉛直応力は $\sigma_z = P/z \cdot I_{\sigma z}$ と書けるが、 $I_{\sigma z}$ は影響係数で x/z , E/G および ν の関数である。表-1にその1例を示す。

表-1 $E/G=5.0$, $\nu=0.3$

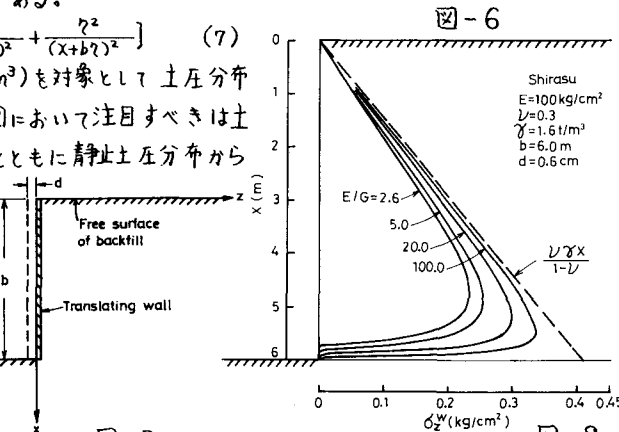
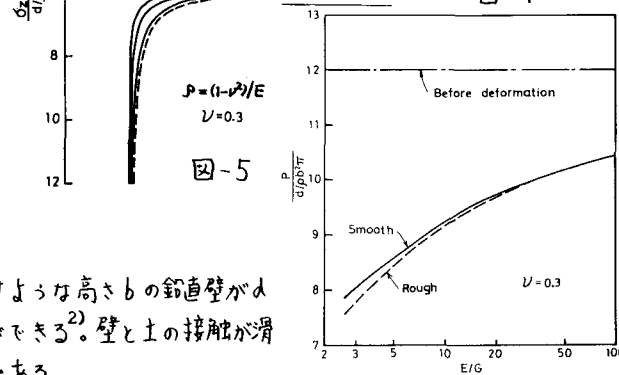
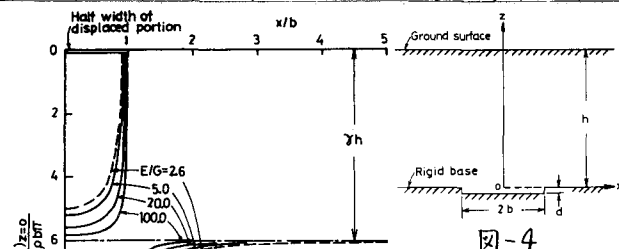
x/z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.8201	0.8197	0.8185	0.8167	0.8140	0.8107	0.8066	0.8018	0.7964	0.7903
0.1	0.7836	0.7764	0.7686	0.7603	0.7515	0.7422	0.7326	0.7226	0.7123	0.7017
0.2	0.6908	0.6797	0.6685	0.6570	0.6455	0.6339	0.6222	0.6104	0.5987	0.5870
0.3	0.5753	0.5637	0.5521	0.5406	0.5293	0.5180	0.5069	0.4959	0.4851	0.4744
0.4	0.4639	0.4536	0.4435	0.4335	0.4237	0.4142	0.4048	0.3956	0.3865	0.3777
0.5	0.3691	0.3607	0.3524	0.3443	0.3365	0.3288	0.3213	0.3139	0.3068	0.2998
0.6	0.2930	0.2863	0.2799	0.2735	0.2674	0.2614	0.2555	0.2498	0.2442	0.2388
0.7	0.2335	0.2283	0.2233	0.2184	0.2136	0.2089	0.2044	0.2000	0.1956	0.1914
0.8	0.1873	0.1833	0.1794	0.1756	0.1719	0.1683	0.1648	0.1613	0.1580	0.1547
0.9	0.1515	0.1484	0.1454	0.1424	0.1395	0.1367	0.1339	0.1312	0.1286	0.1261
1.0	0.1236	0.1211	0.1187	0.1164	0.1141	0.1119	0.1097	0.1076	0.1055	0.1035
1.1	0.1016	0.0996	0.0977	0.0959	0.0941	0.0923	0.0906	0.0889	0.0873	0.0857
1.2	0.0841	0.0826	0.0811	0.0796	0.0781	0.0767	0.0754	0.0740	0.0727	0.0714
1.3	0.0701	0.0689	0.0677	0.0665	0.0653	0.0642	0.0631	0.0620	0.0609	0.0599
1.4	0.0589	0.0579	0.0569	0.0559	0.0550	0.0541	0.0532	0.0523	0.0514	0.0505
1.5	0.0497	0.0489	0.0481	0.0473	0.0465	0.0458	0.0450	0.0443	0.0436	0.0429
1.6	0.0422	0.0415	0.0409	0.0402	0.0396	0.0390	0.0384	0.0378	0.0372	0.0366
1.7	0.0360	0.0355	0.0349	0.0344	0.0339	0.0334	0.0329	0.0324	0.0319	0.0314
1.8	0.0309	0.0305	0.0300	0.0296	0.0291	0.0287	0.0283	0.0279	0.0274	0.0270
1.9	0.0266	0.0263	0.0259	0.0255	0.0251	0.0248	0.0244	0.0241	0.0237	0.0234
2.0	0.0231	0.0227	0.0224	0.0221	0.0218	0.0215	0.0212	0.0209	0.0206	0.0203
2.1	0.0201	0.0198	0.0195	0.0192	0.0190	0.0187	0.0185	0.0182	0.0180	0.0177
2.2	0.0175	0.0173	0.0170	0.0168	0.0166	0.0164	0.0162	0.0159	0.0157	0.0155
2.3	0.0153	0.0151	0.0149	0.0147	0.0145	0.0144	0.0142	0.0140	0.0138	0.0136
2.4	0.0135	0.0133	0.0131	0.0130	0.0128	0.0126	0.0125	0.0123	0.0122	0.0120

4. Finnの問題

図-4に示すように、一様な地盤を支える剛な水平基盤の一部が幅 $2b$ にわたって d だけ鉛直下方に変位したとする。Finnの解法にならってこれを解けば、地盤底面での鉛直応力は地盤・基盤の接触が滑らかなとき次式のように決定される。

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{2(1-\nu)abE}{(1-\nu^2)(5-\gamma^2)\pi} \frac{1}{x^2 b^2} + \gamma h \quad (6)$$

式(6)は E/G をパラメータとして図-5のように描かれるが、鉛直応力は変位幅の両端で急増するような分布を示すとともに、 E/G が増加しせん断抵抗が低下するに伴って減少して自重による値（一点鎖線）に近づくことがわかる。この応力分布はアーチ作用として知られる応力分布に対応し、その E/G による変化はアーチ作用がゆるい砂地盤では起りにくいという経験則を理論的に証明するものと考えてよい。ちなみに、変位部分に作用する全土圧を求めて E/G に対してプロットすれば図-6が得られ、 E/G とともに土圧は増加して変位前のすなわち自重による値に漸近することが認められる。

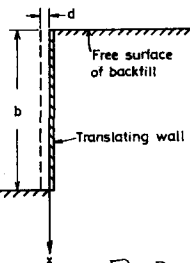


5. 鉛直壁の平行移動による弾性土圧

前章の解を利用することにより、図-7に示すような高さ b の鉛直壁が d だけ平行移動する場合の弾性土圧を求めることができる²⁾。壁と土の接触が滑らかな場合について結果を示せば、次のとおりである。

$$\sigma_z^w = \frac{\nu \gamma x}{1-\nu} + \frac{2dbE}{(1-\nu^2)(5-\gamma^2)\pi} \left[\frac{1-\gamma^2}{x^2 b^2} - \frac{1}{(x+b)^2} + \frac{\gamma^2}{(x+b)^2} \right] \quad (7)$$

図-8にシラス ($E=100 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, $\gamma=1.6 \text{ t/m}^3$) を対象として土圧分布も静止土圧分布 (破線) と比べて示すが、この図において注目すべきは土圧分布が E/G の減少すなわちせん断抵抗の増加とともに静止土圧分布から離れることである。Tschebotarioffは移動壁の土圧分布が静止土圧分布から離れる1つの理由にせん断力の影響を挙げているが、本論の結果はこの指摘に理論的な証を与えうると思われる。



1) 山内、竹藤, 第12回土質工学研究発表会講演集 (1977).

2) Finn, W.D.L., J. Soil Mech. Found. Div., Proc. ASCE, 89-SM5 (1963).