

1. 巨視的応力の定義

粒状体における巨視的あるいは統計的応力は ある切断面における粒子断面の応力によって定義されることとある (Marsal 1973) が、一般的には粒子間力を用いて定義される。

巨視的に見て一様な粒状体内の微小六面体に作用する応力を考えよう。この微小六面体には十分多数の粒子が含まれているものとする。微小面積 ΔS_z を有する z 面上の応力 $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ は次式で定義される。

$$\sigma_z = \frac{1}{\Delta S_z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{kz}, \quad \tau_{zx} = \frac{1}{\Delta S_z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{kx}, \quad \tau_{zy} = \frac{1}{\Delta S_z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{ky} \quad \dots (1)$$

ここに f_{kz}, f_{kx}, f_{ky} は ΔS_z 面積の z 面とほさんでその上方に重心を有する粒子と下方に重心を有する粒子との接点に作用する粒子間力 f_k のそれぞれ z, x, y 方向成分であり、 n_z は z 面にかかわる接点数である。他の要素面 (x 面, y 面) についても同様の関係式が定義される。

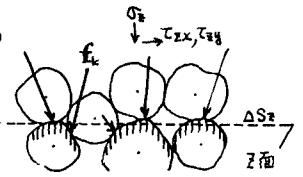


図-1 粒子間力

2. 粒子間力の推定

任意の接点における粒子間力の期待値 $\bar{f}_i$ は、作用している主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; 接点角 α_i, β_i (図-2) および微視的構造特性の函数として定義できる。小田 (1974) は 期待値 $\bar{f}_i$ の成分 $\bar{f}_{i1}, \bar{f}_{i2}, \bar{f}_{i3}$ を次のように与えた。

$$\bar{f}_{i1} = k_1 \cdot \sigma_1 \cdot |\cos \beta_i|, \quad \bar{f}_{i2} = k_2 \cdot \sigma_2 \cdot |\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i|, \quad \bar{f}_{i3} = k_3 \cdot \sigma_3 \cdot |\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i| \quad \dots (2)$$

式中の k_1, k_2, k_3 は粒状体の粒子配列に依存するパラメータであり、次式のとおり。

$$k_1 = \frac{1}{n \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin 2\beta \, d\alpha \, d\beta}, \quad k_2 = \frac{1}{n \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2E(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta}, \quad k_3 = \frac{1}{n \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} ZE(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta}$$

ここに n は単位面積を介して粒子間力を伝達する接点数であり、 $E(\alpha, \beta)$ は接点における接平面への法線方向の確率密度函数である。

さてここで、巨視的応力が要素面にかかわる接点における粒子間力で定義されたことを思い起すならば、式(2)中のパラメータ k_1, k_2, k_3 も 各要素面にかかわる接点の接点角分布を反映していることが望ましい。 $E(\alpha, \beta)$ は要素体積中に含まれる接点の確率密度であって、各要素面にかかわる接点の確率密度 $E_1(\alpha, \beta), E_2(\alpha, \beta), E_3(\alpha, \beta)$ とは異なっているのである。

そこで式(2)の代りに次式で粒子間力を与えることにする。

$$\bar{f}_{i1} = k_{p1} \cdot \sigma_1 \cdot |\cos \beta_i|, \quad \bar{f}_{i2} = k_{p2} \cdot \sigma_2 \cdot |\cos \alpha_i \sin \beta_i|, \quad \bar{f}_{i3} = k_{p3} \cdot \sigma_3 \cdot |\sin \alpha_i \sin \beta_i|;$$

$$k_{p1} = \frac{1}{n_1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E_1(\alpha, \beta) \sin 2\beta \, d\alpha \, d\beta}, \quad k_{p2} = \frac{1}{n_2 \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2E_2(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta},$$

$$k_{p3} = \frac{1}{n_3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2E_3(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta} \quad \dots (3)$$

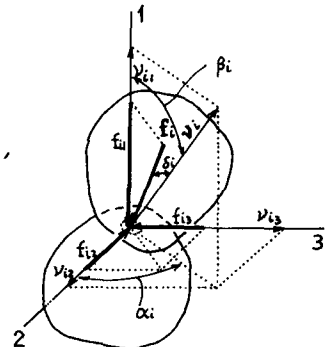


図-2 粒子接点の諸量

ここに n_1, n_2, n_3 はそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 面を介して力を伝達する単位面積当り接点数、 $E_1(\alpha, \beta), E_2(\alpha, \beta), E_3(\alpha, \beta)$ はそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 面を介

て力を伝達する接点の接点角の確率密度函数である。

3. E_{p1}, E_{p2}, E_{p3} と E との関係

粒状体全体の接点に関する確率密度が $E(\alpha, \beta)$ で与えられるとき、ある1つの平面を想定することによって選ばれた接点の確率密度を考えよう。法線方向が n の平面を想定することによって、ある接点を選択される確率は、接点を構成する2粒子の半径の和とこの接点における法線の面の法線 n 方向への正射影の積 $(r_a + r_b) \cos \beta_{n\theta}$ に比例するであろう(2次元的に例示)。粒状体は種々の粒径の粒子から成るが、ある特定の接点角 α, β で粒径が大きいという現象はほとんどないと考え、 $E(\alpha, \beta)$ から E_{p1}, E_{p2}, E_{p3} への変換は近似的に次式で行ない得るといえる。

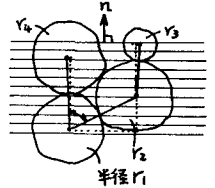


図-3 面による選択確率の相違

$E_{p1}(\alpha, \beta) = 4E(\alpha, \beta) \cos \alpha$, $E_{p2}(\alpha, \beta) = 4E(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin \beta$, $E_{p3}(\alpha, \beta) = 4E(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin \beta$ (4)

等方的な粒状体の場合でも E_{p1}, E_{p2}, E_{p3} は一様とはならない。

4. 各要素面にかかわる接点数 n_1, n_2, n_3 について

一例として σ_1 面について考えよう。任意の σ_1 面を定めると、この面に関して単位面積当たり n_1 個の粒子間接点を選択され、その確率密度は $E_{p1}(\alpha, \beta)$ である。図-4に示すように、 σ_1 面にかかわる接点を構成する粒子Aから出発して、隣接接点をランダムに選択しつつ次に結びながら、概ね σ_2 方向に進み粒子Bに至るものとしよう。その場合にAからBに至る経路が固体部分のみを通過し得たと仮定すると、Horne (1965) による mean projected solid path が計算できる。結果のみ示すと σ_1 面について σ_2 方向の m.p.s.p. は m_{12} 、 σ_3 方向の m.p.s.p. は m_{13} とすれば、平均粒径を $\bar{r}$ として

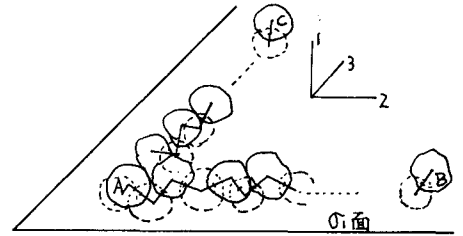


図-4 σ_1 面上の m.p.s.p.

$$m_{12} = \bar{r} \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_{p1}(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin \beta \, d\alpha \, d\beta$$
 (5)

$$m_{13} = \bar{r} \int_0^\pi \int_0^\pi E_{p1}(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin \beta \, d\alpha \, d\beta$$

となる。他の面についても同様にして、 $m_{23}, m_{21}, m_{31}, m_{32}$ が計算できる。ところで単位長さ当りの通過接点数は m.p.s.p. の逆数に比例するので、単位面積当りの接点数 n とせば n_1 は $\frac{1}{m_{12} \cdot m_{13}}$ に比例するであろう。したがって

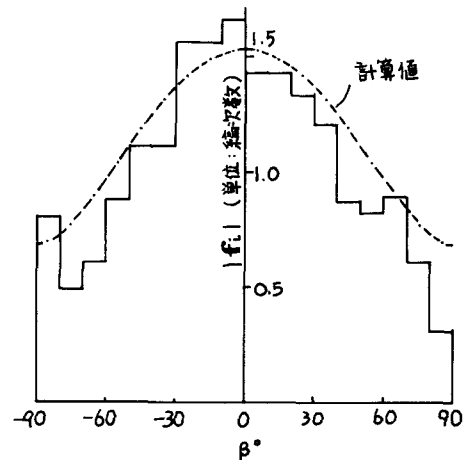


図-5 粒子間力の計算値と測定値との比較 (BC11H-4)

$$n_1 : n_2 : n_3 = \frac{1}{m_{12} \cdot m_{13}} : \frac{1}{m_{23} \cdot m_{21}} : \frac{1}{m_{31} \cdot m_{32}} \quad (6)$$

となることが予想される。

5. 粒子間力の計算値と2次元光弾性実験による測定値との比較

粒子間力の絶対値は次元によって計算できる。

$$|f_{\beta}| = \sqrt{f_{\beta 1}^2 + f_{\beta 2}^2 + f_{\beta 3}^2} \quad (7)$$

2次元の場合には $|f_{\beta}| = |f_{\beta 1}| \sqrt{\left(\frac{k_{p2}}{k_{p1}} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \sin^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_1}$ ($|f_{\beta 1}| : \beta = 0^\circ$ における粒子間力) (8)

で計算される。光弾性材料で作成した丸棒の2次元残留体の2軸圧縮試験結果を図-5に示す。粒子間力の値は接点直下0.9 r点における偏次数の値で示してある。計算値を鎖線で示すが、比較的良好一致を示している。

5. あとがき 今後、接点数 n_1, n_2, n_3 についてさらに考察を加えてゆきたい。 [小田西(1975) 破壊学 III-2 参考文献: Oda(1974) Soils and Foundations, Vol.14 No.1. Marsal(1973) Casagrande Volume, Horne(1965) Proc. Roy.S. A.286.]