

III-43 大の応力比～ひずみ増分比関係の一考察

日本大学大学院 学生員 下邊 潤

1. まえがき

筆者らは相異なる三主応力下の乾燥砂のせん断挙動について立方体多軸試験機を用いて実験的に調べて来た。これらの結果のうち、砂の応力～変形特性として次のような関係が導出されている。すなむち、応力比 σ/σ_0 ～ひずみ増分比 $d\varepsilon_{ij}/d\varepsilon_{ij}$ の関係の直線性が近似的に成立する。

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = M' - \alpha \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\varepsilon_{ij}} \quad \dots\dots(1)$$

ここに、 $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33}$, $d\varepsilon_{ij} = \sqrt{(d\varepsilon_{11}-d\varepsilon_{22})^2 + (d\varepsilon_{22}-d\varepsilon_{33})^2 + (d\varepsilon_{33}-d\varepsilon_{11})^2}$

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2} \quad \dots\dots(2)$$

M' は応力経路および間げき比によって異なる係数であり、実験的に求められる。本報告は式(1)における、平均主応力一定条件下的三軸圧縮状態を対象とした大の応力比～ひずみ増分比関係と異方性変形係数との関連を考察したものである。

2. 大のひずみ増分比と異方性変形係数との関係

大のような土学的材料の応力～ひずみ関係は非線形性を有するので、応力増分 $d\varepsilon_{ij}$ とひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^e$ ($i, j = 1, 2, 3$) とを関係づける式が必要となり、次のように定義する。^{3), 4)} $\{d\varepsilon_{ij}\} = [C_{ep}]\{d\varepsilon_{ij}^e\} \quad \dots\dots(3)$

ここで、 $[C_{ep}]$ は一般に弾塑性ストリックスと呼ばれているものである。また、ひずみ増分は弾性成分と塑性成分に分けられるから、 $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad \dots\dots(4)$ となる。式(3)が満足しなければならないことは $[C_{ep}]$ は応力状態に依存する変形定数となることである。しかし、ここで $\{d\varepsilon_{ij}\}$ を面内等方性を有する積層異方性材料とし、前述の条件下($\sigma = \text{一定}$, $\delta = \text{単調増加}$, 三軸圧縮)におけるストリックス $[C_{ep}]$ の対称性を仮定する。^{3), 4)} この種の積層材料の一般的な応力～ひずみ関係式は、三軸圧縮状態の軸対称応力(変形)問題では式(3)のようなくストリックスの形に書けば、次のようになる。

$$\begin{cases} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}^e \\ d\varepsilon_{22}^e \\ d\varepsilon_{33}^e \end{bmatrix} \quad \dots\dots(5)$$

式(5)は軸対称直交異方性を示す応力増分・ひずみ増分関係式である。ここで、定数 $E_{33}, \nu_{31}, \nu_{32}$ は積層面内(G_{33} -面)の変形に関するもの； E_{11}, ν_{13} は積層面に垂直な方向(G_{11} 方向)に関するものである。 E_{11}, E_{33} はそれぞれ直角方向弾性係数、水平方向弾性係数であり、 ν_{ij} は j 方向ひずみの i 方向ひずみに対する影響を示すボアソン比である。ところで、応力増分 $d\varepsilon_{ij}^e$ を等方圧縮

1) 下邊、宮森：「乾燥砂の多軸圧縮試験」(第2報) 土木学会第29回国際学術講演会(5.4年)

同 上：「乾燥砂の多軸圧縮試験」(第3報) 一報のダイレーティンジャー博士による同学会第30回国際学術講演会(5.5年)

）

* 分成分 dP と偏差応力増分成分 $d\varepsilon_{ij}^e$ に分離すれば、 $\{d\varepsilon_{ij}\} = \{dP\} + \{d\varepsilon_{ij}^e\} \quad \dots\dots(6)$ となる。また、

式(5)でストリックス対称性の仮定より、

$$\frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{33}} \quad \dots\dots(7) \quad \text{であるから}, \{dP\} がよび$$

$\{d\varepsilon_{ij}^e\}$ に関する若干のエストリックス演算より、式(5)に式(6)を代入すれば以下のようになる。ここで、対角線ストリックス要素を次のように置きかえる。

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu_{13}}{E_{11}} &= \frac{1}{3K_{11}}, \quad \frac{1-\nu_{31}-\nu_{23}}{E_{33}} = \frac{1}{3K_{33}} \\ \frac{1+\nu_{13}}{E_{11}} &= \frac{1}{2G_{11}}, \quad \frac{1+2\nu_{31}-\nu_{23}}{E_{33}} = \frac{1}{2G_{33}} \end{aligned} \quad \dots\dots(8)$$

すなむち、 K_{11}, K_{33} はそれぞれ鉛直方向体積弾塑性係数、水平方向体積弾塑性係数； G_{11}, G_{33} は鉛直方向せん断弾塑性係数、水平方向せん断弾塑性係数である。ここで、式(6)の $\{dP\}, \{d\varepsilon_{ij}^e\}$ に関するストリックスを次のようくすれば、式(3), (6)より

$$[C_{ep}]^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{3K_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3K_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3K_{33}} \end{bmatrix}, \quad [C_{ep}]^b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2G_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{33}} \end{bmatrix}$$

$$\{d\varepsilon_{ij}\} = [C_{ep}]^e \{dP\} + [C_{ep}]^b \{d\varepsilon_{ij}^e\} \quad \dots\dots(9)$$

となる。式(9)はひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}^e$ が応力増分 $d\varepsilon_{ij}^e$ の球面ストリックス成分と偏差ストリックス成分に分離できることを示している。一方、ひずみ増分比 $d\varepsilon_{ij}^e/d\varepsilon_{ij}$ が $d\varepsilon_{ij}^e$ の関数だから、以下のように表わしができる。

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^e}{d\varepsilon_{ij}} = f(\{d\varepsilon_{ij}\}) = f([C_{ep}]^e \{dP\} + [C_{ep}]^b \{d\varepsilon_{ij}^e\}) \quad \dots\dots(10)$$

これが式(2)、ひずみ増分比 $d\varepsilon_{ij}^e/d\varepsilon_{ij}$ が異方性変形係数と対応づけられることを意味し、レバーハは応力比 σ/σ_0 と異

方性変形係数との関係も明らかにならうことを含んでい
る。以上がひずみ増分比に関する知識である。

3. 平均主応力一定試験での適用例

平均主応力一定条件の三軸圧縮状態を数式表示すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3}(G_{11} + 2G_{33}) = \text{const.}, \quad G_{11} > G_{22} = G_{33} \\ dP &= \frac{1}{3}(dG_{11} + 2dG_{33}) = 0, \quad dG_{22} = dG_{33} \end{aligned} \quad \left\{ \quad \text{---(11)}$$

式(11)より、 $dP = 0$ だから、式(9)から弾塑性ひずみ増分はせん断応力増分成分のみによって起り、せん断ひずみ増分となる。すなはち、

$$d\varepsilon_{ij} = [C_{ij}]^{\frac{1}{2}} d\sigma_{ij} \quad \text{---(12)}$$

したがって、式(11), (12)より固定された各主応力方向のひずみ増分は次のようになる。

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= \frac{1}{2G_{11}}(dG_{11} - dP) = \frac{1}{2G_{11}}dG_{11} \\ d\varepsilon_{22} &= \frac{1}{2G_{33}}(dG_{22} - dP) = \frac{1}{2G_{33}}dG_{22} = -\frac{1}{2G_{33}}dG_{11} \\ d\varepsilon_{33} &= \frac{1}{2G_{33}}(dG_{33} - dP) = \frac{1}{2G_{33}}dG_{33} = -\frac{1}{2G_{33}}dG_{11} \end{aligned} \quad \left\{ \quad \text{---(13)}$$

また、弾塑性体積ひずみ増分 dV と弾塑性せん断ひずみ増分 $d\gamma$ を求めろ。式(2), (13)より、 $dV = d\varepsilon_{11} + 2d\varepsilon_{33}$; $d\gamma = \sqrt{2}(d\varepsilon_{11} - d\varepsilon_{33})$ となることに注意すれば、

$$dV = \left(\frac{1}{2G_{11}} - \frac{1}{2G_{33}}\right)dG_{11}; \quad d\gamma = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2G_{11}} + \frac{1}{2G_{33}}\right)dG_{11} \quad \text{---(14)}$$

となる。式(14)より、ひずみ増分比 $\frac{dV}{d\gamma}$ は

$$\frac{dV}{d\gamma} = \frac{\sqrt{2}(G_{33} - G_{11})}{2G_{33} + G_{11}} \quad \text{---(15)}$$

式(15)は平均主応力一定条件での軸対称三軸圧縮状態のひずみ増分比が異方性変形係数のみによって表わされることを示している。また、式(15)より $G_{11} = G_{33}$ ならば、 $\frac{dV}{d\gamma} = 0$ となる。すなはち、 $dV = 0$ これは式(1)の応力比へひずみ増分比関係式の $\eta/p = \eta = M'$ に相当する。さらに、せん断中の G_{33}, G_{11} の大小関係を調べて見ると、 $\eta < M'$, $dV > 0$ の $\frac{dV}{d\gamma} > 0$ だから、 $G_{33} > G_{11}$; $\eta > M'$, $dV < 0$ の $\frac{dV}{d\gamma} < 0$ だから、 $G_{11} > G_{33}$ となる。一方、式(13)より、 $\frac{d\varepsilon_{11}}{d\varepsilon_{33}} = -2\frac{G_{33}}{G_{11}}$ となるから、 $\frac{G_{33}}{G_{11}} > 1$ のとき、 $d\varepsilon_{11} > -2d\varepsilon_{33}$; $\frac{G_{33}}{G_{11}} < 1$ のとき、 $d\varepsilon_{11} < -2d\varepsilon_{33}$ である。ちょうど、 $\frac{G_{33}}{G_{11}} = 1$ のときが $d\varepsilon_{11} = -2d\varepsilon_{33}$ すなはち、 $dV = d\varepsilon_{11} + 2d\varepsilon_{33} = 0$ となるはずである。

以上のような結果を模式的に示したのが Fig.-1 である。したがって、Fig.-1 より $\eta < M'$ のとき、水平方向が変形しにくく、 $\eta > M'$ のときは逆に鉛直方向の方が変形が小さくなることがわかる。このことを実験結果と対比させようために、乾燥砂の多軸試験結果($P=1$ 一定、

* 三軸圧縮)に基づく $\eta \sim \frac{G_{33}}{G_{11}}$ 関係を検証したのが、Fig.-1 である。

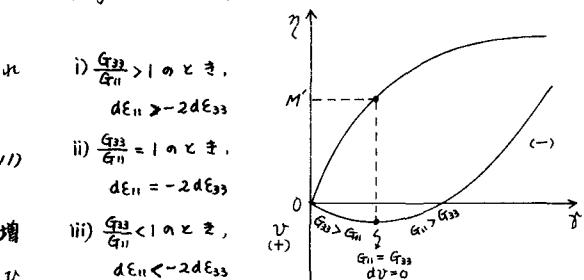


Fig.-1 応力比へひずみ増分比関係

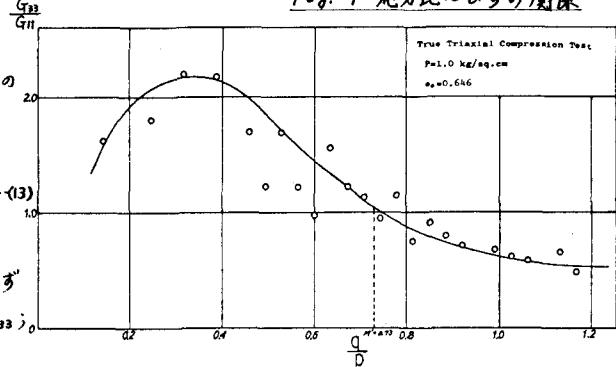


Fig.-2 $\eta \sim \frac{G_{33}}{G_{11}}$ 関係(砂の多軸試験結果より)

Fig.-2 より、 $\eta < M'$ (=0.73) の $\frac{G_{33}}{G_{11}} > 1$, $\eta > M'$ のときは $\frac{G_{33}}{G_{11}} < 1$ となることがわかる。そして、 $M' = 0.73$ では $\frac{G_{33}}{G_{11}} < 1$ となっている。以上のことは前述の考察と一致しており、大の応力比へひずみ増分比関係と異方性変形係数が何らかの関連があることを示すものである。ある特定の応力条件での式(15)は興味深い。

4. まとめ

平均主応力一定条件での三軸圧縮試験のひずみ増分比が異方性変形係数だけ表わされることを示したが、式(15)はある特定の応力条件でのことであり、また偶然にも応力項が含まれていない懸念もある。実際、 G_{33}, G_{11} などは応力比 η や初期間ゲキ比 η_0 などに左右されるものであり、変形係数の応力経路依存性の取扱い方にまだまだ不備な点があることを付記しておく。

今後、種々の応力履歴について特に砂の多軸試験を行ない、異方性変形係数と応力比へひずみ増分比関係との対応を明らかにして行きたいと考えている。未筆ながら日頃から御指導頂いている本学浅川美利教授、宮森建樹助教授に深謝の意を表します。

3) O.C. オンカーゲイソウ I.
K. チューン : 「マトリックス有限要素法」吉誠社監修、培風館
4) C.S. デサイ, J.F. アーベル : 「マトリックス有限要素法—その基礎理論と応用—」山本善之郎、科学技術出版社