

1. ま え が き

筆者らは相異なる三主応力下の乾燥砂のせん断挙動について立方体多軸試験機を用いて実験的に調べて来た。^{9,2)}
これらの結果のうち、砂の応力～変形特性として次のような関係が導出されている。すなわち、応力比 $\frac{\sigma}{p}$ ～ ひずみ増分比 $\frac{d\epsilon}{d\epsilon}$ 関係の直線性が近似的に成立する。

$$\frac{\sigma}{p} = M' - R \frac{d\epsilon}{d\epsilon} \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 $d\epsilon = d\epsilon_{11} + d\epsilon_{22} + d\epsilon_{33}$, $d\epsilon = \sqrt{(d\epsilon_{11} - d\epsilon_{22})^2 + (d\epsilon_{22} - d\epsilon_{33})^2 + (d\epsilon_{33} - d\epsilon_{11})^2}$
 $p = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$, $\frac{\sigma}{p} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2}$ }
----- (2)

M' , R は応力経路および間ひずみ比によって異なる係数であり、実験的に求められる。本報告は式(1)における、平均主応力一定条件下での三軸圧縮状態を対象とした土の応力比～ひずみ増分比関係と異方性変形係数との関連を考察したものである。

2. 土のひずみ増分比と異方性変形係数との関係

土のような土質的材料の応力～ひずみ関係は非線形性を有するので、応力増分 $d\sigma_{ij}$ とひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) とを関係づける式が必要となり、次のように定義する。^{3),4)} $\{d\epsilon_{ij}\} = [C_{ep}]\{d\sigma_{ij}\}$ ----- (3)

ここで、 $[C_{ep}]$ は一般に弾塑性マトリックスと呼ばれているものである。また、ひずみ増分は弾性成分と塑性成分に分けられるから、 $d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p$ ----- (4)
となる。式(3)で注意しなければならないことは $[C_{ep}]$ は応力状態に依存する変形定数となることである。しかし、ここでは土を面内等方性を有する積層異方性材料として、前述の条件下 (p = 一定, σ = 単調増加, 三軸圧縮) においてマトリックス $[C_{ep}]$ の対称性を仮定する。^{3),4)} この種の積層材料の一般的な応力～ひずみ関係式は、三軸圧縮状態の軸対称応力(変形)問題では式(3)のようなマトリックスの形に書けば、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{11}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{11}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{11}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & -\frac{\nu_{22}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{11}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{22}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (5)}$$

式(5)は軸対称直交異方性を示す応力増分～ひずみ増分関係式である。ここで、定数 E_{33} , ν_{11} , ν_{22} は積層面内 (σ_{22} - σ_{33} 面) の変形に関するもの; E_{11} , ν_{33} は積層面に垂直な方向 (σ_{11} 方向) に関するものである。 E_{11} , E_{33} はそれぞれ鉛直方向弾性係数、水平方向弾性係数であり、 ν_{ij} は i 方向ひずみの j 方向ひずみに対する影響を示すポアソン比となる。ところで、応力増分 $d\sigma_{ij}$ を等方圧増分

$d\sigma$ と偏差応力増分 $d\sigma_{ij}$ に分離すれば、
 $\{d\sigma_{ij}\} = \{d\sigma\} + \{d\sigma_{ij}\}$ ----- (6) となる。また、式(5)でマトリックスの対称性の仮定より、
 $\frac{\nu_{11}}{E_{11}} = \frac{\nu_{33}}{E_{33}}$ ----- (7) であるから、 $\{d\sigma\}$ および $\{d\sigma_{ij}\}$ に関する若干のマトリックス演算より、式(5)に式(6)を代入すれば以下のようなになる。ここで、対角線マトリックス要素を次のように置きかえる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-2\nu_{11}}{E_{11}} &= \frac{1}{3K_{11}} , \quad \frac{1-\nu_{31}-\nu_{32}}{E_{33}} = \frac{1}{3K_{33}} \\ \frac{1+\nu_{11}}{E_{11}} &= \frac{1}{2G_{11}} , \quad \frac{1+2\nu_{31}-\nu_{32}}{E_{33}} = \frac{1}{2G_{33}} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (8)}$$

すなわち、 K_{11} , K_{33} はそれぞれ鉛直方向体積弾塑性係数、水平方向体積弾塑性係数; G_{11} , G_{33} は鉛直方向せん断弾塑性係数、水平方向せん断弾塑性係数である。ここで、式(6)の $\{d\sigma\}$, $\{d\sigma_{ij}\}$ に関連するマトリックスを次のようにすれば、式(3), (6) より

$$[C_{ep}]^p = \begin{bmatrix} \frac{1}{3K_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3K_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3K_{33}} \end{bmatrix} , \quad [C_{ep}]^s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2G_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2G_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{33}} \end{bmatrix}$$

$$\{d\epsilon_{ij}\} = [C_{ep}]^p \{d\sigma\} + [C_{ep}]^s \{d\sigma_{ij}\} \quad \text{----- (9)}$$

となる。式(9)はひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ が応力増分 $d\sigma_{ij}$ の球マトリックス成分と偏差マトリックス成分に分離できることを示している。一方、ひずみ増分比 $\frac{d\epsilon}{d\epsilon}$ は $d\epsilon_{ij}$ の関数だから、以下のように表わすことができる。

$$\frac{d\epsilon}{d\epsilon} = f(\{d\epsilon_{ij}\}) = f([C_{ep}]^p \{d\sigma\} + [C_{ep}]^s \{d\sigma_{ij}\}) \quad \text{----- (10)}$$

したがって、ひずみ増分比 $\frac{d\epsilon}{d\epsilon}$ が異方性変形係数と対応づけられることを意味し、しいては応力比 $\frac{\sigma}{p}$ と異

* (三軸圧縮) に基づく $\gamma \sim \frac{G_{33}}{G_{11}}$ 関係を検証したのが、
Fig. 9-8 である。

i) $\frac{G_{33}}{G_{11}} > 1$ のとき,
 $dE_{11} > -2dE_{33}$

ii) $\frac{G_{33}}{G_{11}} = 1$ のとき,
 $dE_{11} = -2dE_{33}$

iii) $\frac{G_{33}}{G_{11}} < 1$ のとき,
 $dE_{11} < -2dE_{33}$

Fig.-1 応力比～ひずみ関係

Fig. 1 圧力比～ひずみ関係

True Triaxial Compression Test:
P₀ = 0 kg/cm²
σ₀ = 0.646

Figure 1 is a graph showing the relationship between True Stress (σ) and True Strain (ϵ) for a True Triaxial Compression Test. The vertical axis represents True Stress (σ) and the horizontal axis represents True Strain (ϵ). The curve starts at the origin (0,0), rises to a peak of approximately 2.2 at $\epsilon \approx 0.35$, and then gradually decreases to about 0.5 at $\epsilon = 1.2$. A vertical dashed line is drawn at $\epsilon = 0.77$, labeled $\epsilon^* = 0.77$.

Fig.-2 $\eta \sim \frac{G_{33}}{G_{11}}$ 関係 (砂の9軸試験結果より)

Fig.-2 より, $\tau < M' (=0.73)$ では $\frac{G_{32}}{G_{11}} > 1$, $\tau > M'$ のときは $\frac{G_{32}}{G_{11}} < 1$ となることがわかる。そして, $M' = 0.73$ ではほぼ $\frac{G_{32}}{G_{11}} \approx 1$ となっている。以上のことは前述の考察と一致しており、大の応力比へむき増大比関係と異方性変形係数とが何らかの関連があることを示すものである。ある特定の応力条件での式(15)は興味深い。

4. むすび

平均主応力一定条件での三軸圧縮試験のひずみ増分比が異方性変形係数だけで表わされることを示したが、式(4)はある特定の応力条件でのことであり、また偶然にも応力項が含まれていない懸念もある。実際、 G_{33} 、 G_{11} などは応力比 γ や初期間けき比 ϵ_0 などに左右されるものであり、変形係数の応力経路依存性の取扱い方にもまだまだ不備な点があることを付記しておく。

今後、種々の応力経路について特に砂の多軸試験と行ない、異方性変形係数と応力比とへむずみ増分比関係との対応を明らかにして行きたいと考えます。末等ながら日頃から御指導頂いている本学浅川美利教授、宮森建樹助教授に深謝の意を表します。

③ O.C. 坂根キョウヰツ、K. キューン：「マリノリ」有限事業法、吉識雅夫監訳、理風館
④ C.S. デヴィ、J.F. アーベル：「マトリックス有限要素法—その基礎理論と応用—」山本義之訳、科学技術出版社

3) O.C. ユーイング・ウィッツ, Y.
K. チューン: 「マトリックス」
J. F. アーベル: 「マトリックス」
科学技術出版社

81