III-34　有限要素法による三次元飽和・不飽和浸透解析

京都大学工学部　正会員　大西有三
岡山大学工学部　正会員○西垣　誠

1．はじめに

地下鉄工事のための掘削では，計画路線を分割して掘削を行つている。このような状態については，図－1に示すように二次元浸透問題と考え，図－1中のABCD面からの湧出流量を対象として解析し，掘削の際の排水設計を行つて来た。しかし実際の掘削現場を観察すると，図－2中に示すEFGH面およびIJKL面からの湧水も非常に顕著であつた。したがつて，このような掘削面からの湧水流量をも定量的に把握するためには，従来の二次元解析では不可能であり，三次元浸透解析が必要である。

ここでは，このような見地から従来の有限要素法による飽和一不飽和領内の二次元浸透解析[1),2)]を三次元浸透解析に拡張した結果を報告する。

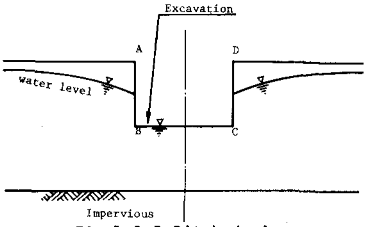

Fig.1 2-D, Ditch drainage

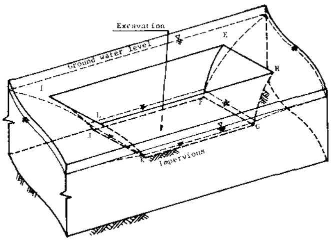

Fig.2 3-D, Ditch drainage

2．解析手法

飽和一不飽和領域内の浸透の支配方程式は，

$$L(\psi)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[K_r(\psi)K_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+K_r(\psi)K_{i3}\right]-\left[C(\psi)+\beta S_s\right]\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \quad \text{------(1)}$$

初期条件　$\psi(x_i,0)=\psi_0(x_i)$　------(2)

境界条件
1．圧力水頭が既知　$\psi(x_i,t)=\psi_b(x_i,t)$
2．流量が既知　$K_r(\psi)\left(k_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+k_{i3}\right)=-V(x_i,t)$
------(3)

ここで，ψ：圧力水頭，k_{ij}：飽和状態における透水係数，K_r：飽和度による透水係数の関数（$0\leq K_r\leq 1$），$C(\psi)$：比水分容量，β：$\beta=1$（飽和領域），$\beta=0$（不飽和領域），S_s：比貯留係数，V_i：ダルシー流速，X_i：基準座標，t：時間，なお圧力水頭（ψ）は，自由水面上で$\psi=0$，不飽和領域で$\psi<0$，飽和領域で$\psi>0$と仮定する。

3．有限要素法による定式化

(2),(3)式の条件を用い(1)式の解を求めるために有限要素法による定式化を行つた。(1)式を定式化するために重みつき残差法による Galerkin 法[3),4)]を用い，Green-Gauss の定理より部分積分を行うと，

$$\iint_V\frac{\partial N_k}{\partial x_i}\left[K_r(\psi)K_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+K_r(\psi)K_{i3}\right]dV-\oint_\Gamma N_k\left[K_r(\psi)K_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}+K_r(\psi)K_{i3}\right]n_i\,d\Gamma$$

$$+\iint_V N_k\left[C(\psi)+\beta S_s\right]\frac{\partial\psi}{\partial t}dV=0 \quad \text{--------(4)}$$

ここで要素は図－3に示す最も一般性の 21 節点アイソパラメトリツク要素を用い，各要素内では飽和状態の透水係数 K_{ij} および比貯留係数S_sは一定と仮定し，$K_r(\psi)$，$C(\psi)$ の値は各角点節点および辺の中点節点の値の平均を用いる。

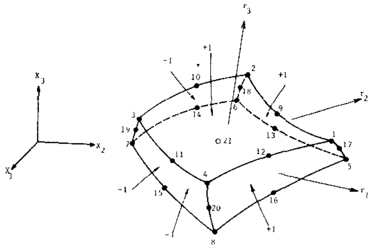
Fig.3 3-D.continuum element node numbering convention

与えられた境界条件を満足する試験関数（ trial function ）を次のように表示する。

$$\psi(x_i,t)=N_n^e(x_i)\psi_n^e(t) \quad (n=1,2\text{------}) \quad \text{--------(5)}$$

（５）式を（４）式に代入してすると，各要素内で厳密には満足しない。すなはち，ある残差が生じる。したがつて，最良の近似解を求めるには，この残差が領域内のどこにおいても恒等的に零になるようにすればよい。よつて全領域については次の式を得る。

$$A_{nm}\psi_m + F_{nm}\frac{d\psi_m}{dt} = Q_n - B_n \qquad ------(6)$$

ここで

$$A_{nm}=\sum_e K_{ij}\int_{Ve} K_\ell^r N_\ell^e \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial N_m^e}{\partial x_j}\,dVe \qquad -----(7)$$

$$F_{nm}=\sum_e\int_{Ve} N_n^e\left(C_\ell N_\ell^e+\beta S_s\right)dVe \qquad ------(8)$$

$$Q_n=-\sum_e\int_{\Gamma e} V N_n^e\,d\Gamma \qquad ------(9)$$

$$B_n=\sum_e K_{i3}\int_{Ve} K_\ell^r N_\ell^e \frac{\partial N_n^e}{\partial x_i}\,dVe \qquad ------(10)$$

（６）式はある持定の時間状態に対して（１）式を有限要素法による定式化をしたものである。したがつて時間項を取り扱う場合には，問題を適当な漸化式に書き下し，逐次計算を行うと全時間にわたる解が得られる。ここでは，差分法による中央差分を採用した。

４．解析例　本解析法で必要な値は，対象となる構成材料の間隙率（n），飽和状態における透水係数（K_{ij}），さらに，図－４に示す$\theta-\psi$，$\theta-K_r$の関係である。図－２の境界問題を解析するために，図－２の$1/4$の領域を対象として三次元解析を行なつた。なお入力データは，$K_{ij}=1.0\times10^{-2}$ cm/sec，$n=0.44$，$\theta-\psi$，$\theta-K_r$の関係は図－２に示すような値を用いた。

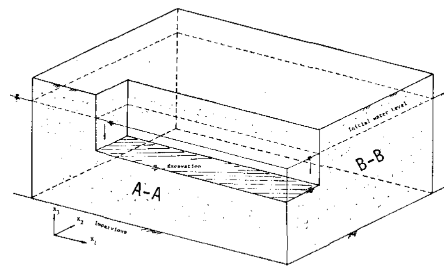

Fig.5 3-D. Ditch Drainage

解析では，掘削面の水位を$10\,m$低下させることによる，地下水位の低下量および，湧水流量の経時的な変化を求める。

図－６は，図－５のＡ－Ａ断面における水位の低下を示したものであり，図－７は，Ｂ－Ｂ断面における水位の低下を示したものである。本研究に示した解析手法により，地下水の挙動を把握する際に，水文学的境界をすべて網羅した解析が可能になつた。

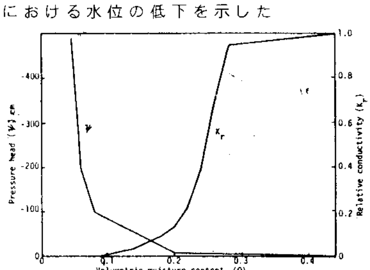

Fig.4 Unsaturated property of soil

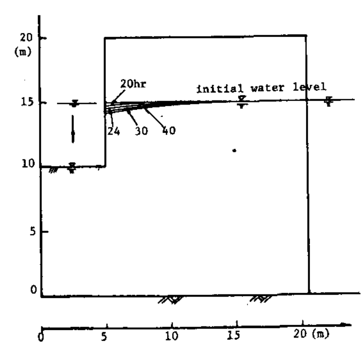

Fig.6 Numerical results (A-A)

謝辞

本研究を行うに当つて色々と御指導くださつた京都大学赤井浩一教授に深く感謝をいたします。

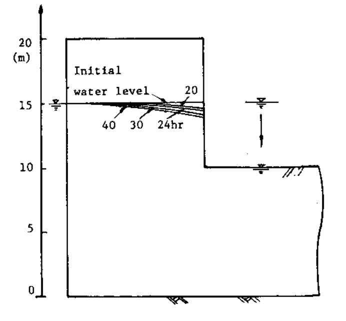

Fig.7 Numerical results (B-B)

参考文献

1）大西　西垣；有限要素法による飽和－不飽和浸透流の解析について，第１１回土質工学会講演集。ＰＰ．７６９－７７２，１９７６

2）大西　西垣；有限要素法による飽和－不飽和領域の浸透解析，土木学会第３１回年次学術講演会講演概要集，第３部，PP.431-432,1976

3) Zienkiewicz,O.C.:The Finite Element Methd in Engineering McGraw-Hill,New york,1971

4) Finlayson B.A. :The Method of Weighted Residuals and Variational Principles,New York,1972