III－33　透水問題の差分式解法について（第3報）

岐阜大学工学部　正会員　○宇野尚雄
岐阜大学工学部　正会員　　新井博

1．概説

地下水や透水問題の一解法としての差分法は一般的に受け入れられて，多数の成果が挙げられている。この報告はそれらの差分解法の問題点をピックアップして，正しい差分展開を提案するものである。

2．従来の研究成果にみられる差分解法の分類

ここでは解法上の問題を議論することを目的としているので，もっとも簡単な準一次元浸透流の基本式を対象として取上げる。準一次元の自由地下水流動は次に示す連続式（式(1)）と運動の式（式(2)）で与えられる。

$$\beta\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}=W \quad (1),\qquad q_x=-k_xH\frac{\partial h}{\partial x}=-T_x\frac{\partial h}{\partial x},\ (T_x=k_x\cdot H) \quad (2)$$

ここにq_x：x方向の流量成分，W：補給源，β：貯留係数，H：水深，k_x：x方向の透水係数，T_x：透水量係数。
式(2)を式(1)に代入すると，基本式，式(3a)が得られ，ときどき式(3b)のようにも展開される。

$$\beta\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+W \quad (3a),\qquad \beta\frac{\partial h}{\partial t}=T_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial T_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+W \quad (3b)$$

式(3)を差分展開するために，地下水位 $h(x,t)$を $h\left(\sum_{i=1}^{i-1}\Delta x_i, k\Delta t\right)=h_i^k$ によって表示しよう。
さて，微分を差分近似するには，前進・後進・中心差分の3種類が知られているが，この報告では中心差分を採用することにする。第2に滞水層定数の差分格子モデル上への対応については2種類考えられFig.1に示す。(a)に従うとT_{xi}，β_iなどは格子点 i で定義され，これらは$(i-\frac{1}{2})\sim(i+\frac{1}{2})$間の値を代表するとみなされ，(b)によれば，パラメターは格子間の領域で定義される。いまT_xを例にとれば，Pinder ら(1968)によって使用された$T_{x\,i-\frac{1}{2}}$というものは

$$T^A_{x\,i-\frac{1}{2}}=(T^A_{x\,i-1}+T^A_{x\,i})/2 \qquad (4)$$

に相当し，算術平均として提案されている。第3に式(3)を展開するのに式(3a)によったものと式(3b)によったものは同じ結果を与え得るかという疑問が提起されよう。第2の問題についてはFig.1(a)によるものをA－id法（id= identification of parameter）と称し，Fig.1(b)をB－id法と呼ぶことにする。第3に対しては式(3b)によるものをA－展開法，式(3a)によるものをB－展開法と呼ぶことにする。B－id法とB－展開法による差分解法はB法と仮称すると，これは次式で表わされる。

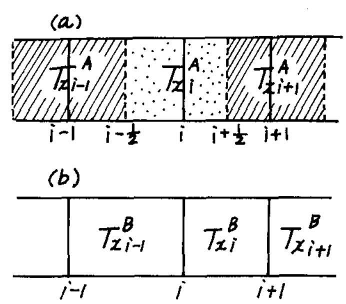

Fig.1　2種類のパラメター対応

$$-a\cdot④+b\cdot⑤-c\cdot⑥=a\cdot①+d\cdot②+c\cdot③+W_i^{k+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t \qquad (5a)$$

ここに，$④=h_{i-1}^{k+1}$，$⑤=h_i^{k+1}$，$⑥=h_{i+1}^{k+1}$，$①=h_{i-1}^{k}$，$②=h_i^{k}$，$③=h_{i+1}^{k}$　(6)

$$a=T^B_{x\,i-1}\cdot\Delta t/\{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)\},\ b=\beta_i^{k+\frac{1}{2}}+a+c,\ c=T^B_{x\,i}\cdot\Delta t/\{\Delta x_i(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)\},\ d=\beta_i^{k+\frac{1}{2}}-a-c \qquad (5b)$$

同様にA－id法とA－展開法による差分解法はA－法と仮称すると，

$$-A\cdot④+B\cdot⑤-C\cdot⑥=A\cdot①+D\cdot②+C\cdot③+W_i^{k+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t \qquad (7a)$$

ここに，$A=\dfrac{T^A_{x\,i-1}\Delta t}{8\,\overline{\Delta x_i}^2}+\dfrac{T^A_{x\,i}\cdot\Delta t}{2\Delta x_{i-1}\cdot\overline{\Delta x_i}}-\dfrac{T^A_{x\,i+1}\Delta t}{8\,\overline{\Delta x_i}^2}$，$C=-\dfrac{T^A_{x\,i-1}\Delta t}{8\,\overline{\Delta x_i}^2}+\dfrac{T^A_{x\,i}\cdot\Delta t}{2\Delta x_i\,\overline{\Delta x_i}^2}+\dfrac{T^A_{x\,i+1}\Delta t}{8\,\overline{\Delta x_i}^2}$　(7b)

$$B=\beta_i^{k+\frac{1}{2}}+\frac{T_{xi}^{A}\Delta t}{2\overline{\Delta x_i}}\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}}+\frac{1}{\Delta x_i}\right),\quad D=\beta_i^{k+\frac{1}{2}}-\frac{T_{xi}^{A}\Delta t}{2\overline{\Delta x_i}}\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}}+\frac{1}{\Delta x_i}\right),\quad \overline{\Delta x_i}=\frac{\Delta x_{i-1}+\Delta x_i}{2} \tag{7c}$$

さてA法，B法以外にも差分解法のための一般式が考えられるがここでは省略する。

差分解法でコンピューター解析した研究は多数あるが，地下水・透水の分野でみると，Rushton (1974) がB法に属すほか，B法に近いが，$T_{x\,i-1}^{B}$ を式(4)で与えられる $T_{x\,i-\frac{1}{2}}^{A}$ で近似した解法が圧倒的に多く，Pinder and Bredehoeft (1968)，Whisler and Klute (1965)，Watson (1967)，Freeze (1971)，Guitjens and Luthin (1971)，Chang and Yeh (1976)，Hefezら (1975)，Ehlig and Halepask (1976)……などがこれに属す。一方，Taylor and Luthin (1969)，Vemuri and Karplus (1969)……はA法に属す方法を採用した。それぞれの研究で取扱われている内容は異なり，式展開も異なるが上述のように分類できよう。

3. 差分式の構成の考察

A法とB法の基本的違いはすでに公表したように式(3b)と式(3a)の差に起因することを主張し，T_xの場所的変化の激しいところで奇異な現象（発散）がA法では生じ，連続条件が満されないことを報告した。[1] そしてこれは微分を差分に展開する際の誤差の相違とみなすことはできないものであることを指摘した。これらは上述の問題点の第3（展開法）にあたるものであった。ここではさらに，第2の問題点（パラメター T_{xi} などの取扱い方）について留意すべき成果を示したいと思う。

筆者が指摘したい問題は式(4)による近似は正しいかという疑問である。よく知られているように成層地盤の合成された透水性が単純な平均で表現し得ないように，上述のFig. 1の(a)と(b)の対応を調べると，

$$T_{x\,i-1}^{B}=\frac{2T_{x\,i-1}^{A}\cdot T_{x\,i}^{A}}{T_{x\,i-1}^{A}+T_{x\,i}^{A}} \quad (8), \qquad T_{x\,i}^{A}=(\Delta x_{i-1}+\Delta x_i)\Big/\left\{\frac{\Delta x_{i-1}}{T_{x\,i-1}^{B}}+\frac{\Delta x_i}{T_{x\,i}^{B}}\right\} \quad (9)$$

が得られる。これらに類似の関係を示したのはBriggsら (1968) の一論文があるのみである。式(4)に相当するのは式(8)である（A－id 法における $T_{x\,i-\frac{1}{2}}^{A}$ はB－id法における $T_{x\,i-1}^{B}$ に相当するから）。式(8)と式(4)とを対比すると，式(4)による値は式(8)による値より小さくなることはなく，$T_{x\,i-1}^{A}$ と $T_{x\,i}^{A}$ の差が大きくなるほどその差は大きくなり，式(4)による評価は T_x を過大評価することになっていることが明らかである。

ここでは紙面の都合で極めて単純な一次元透水の一計算例を示しおくに留める。Fig. 2の右上に $T_x=k_xH$ の分布が $i=4+\frac{1}{2}$ で急変する土性を示してある。これに対して6等分した格子によって，境界条件に一定水頭を与えて定常状態の水頭分布を上述の各種の方法で計算したものである。すでに述べたようにA法では不可解な結果となり，B法でも式(8)の合理的な透水性の表現をすると，きわめて良好な結果を得ることがわかる。

これらの相違が差分近似の精度の差によるものだという安易な見方は捨てねばならない。差分近似式の構成は合理的に組み立てねばならない。B法が正しいのである。

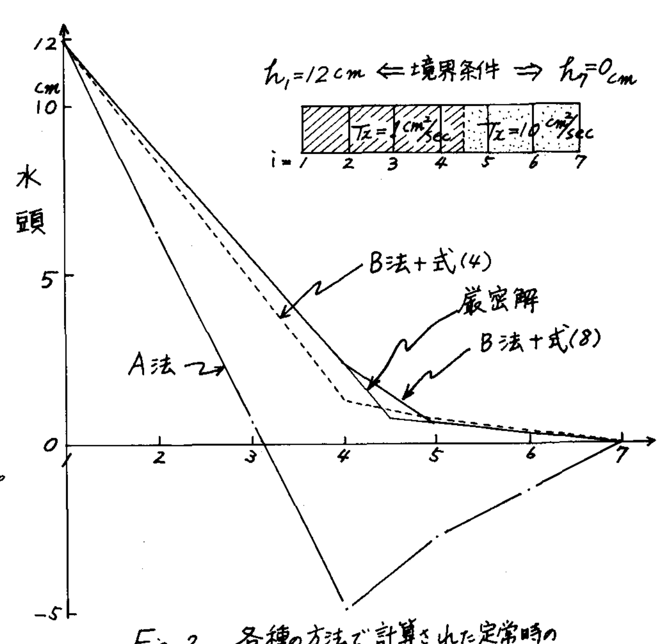

Fig. 2　各種の方法で計算された定常時の水頭分布

参考文献　1) 宇野尚雄：透水問題の差分式解法について，第30回年講，Ⅲ－233，PP. 465～466（昭和50年）