III－19　信頼性予測にもとづく盛土の動的な設計原理

名古屋大学　正　松尾 稔
京都 大学　正　○浅岡 顕

1 「静的設計原理」と「動的設計原理」・・・土木構造物の設計は、実際の施工のはじまる前には、一応すべて完了しているというのがこれまでの慣用のやり方であった。外力や構造材料の強度などの設計に必要な情報はすべて設計に先立って収集され、設計に対しては与件 *data* として事前に準備されているべきものであった。このような慣用の設計原理は、設計が施工前に一括して一度だけなされるという点を強調するために「静的な設計原理」と呼ぶことにしたい。これまでの信頼性設計もその全部がこの静的設計原理を前提としていたといって過言でない。なるほどときには荷重の時間依存性や強度の荷重履歴にともなう劣化などは考察される。この意味では信頼性の動学 *dynamics* は研究されてきているのだが、しかし、これがただちに設計の動学を要請するものではなかった。この報告で展開しようとしている信頼性設計は、静的でなく動的な設計原理にもとづくものである。動的な設計とは、施工中の構造物の挙動の観測にもとづいて、必要ならば設計変更をくりかえすことを、設計の当初から前提としているような時間依存的な設計過程のことである。

静的な信頼性設計と動的な信頼性設計との差異は端的に言えば以下のようである。静的な信頼性設計の結果、構造物の予測される破壊確率（この言葉の定義は後述）がたとえば2％のものが最適になったとしよう。静的な設計原理にもとづけば、現につくっている構造物がこの2％の中に入っているのかどうかについてもう追求しないことになる。しかし動的な設計原理にしたがえば、この2％の危険が現に実現しつつあるのかどうかに観測を用いて常に留意し、もしそうであれば100にふたつのはずの危険が実現しつつあるという情報にもとづき、与件の不確実性（正しくは自然状態－後述－の不確実性）を検討しなおして、必要な設計変更を行なうことになる。したがって、破壊を事前に予知する技術がすぐれていればいるほど、当初の設計で予測される破壊確率は大きくとることが可能となる。このことによって一層経済的でかつ安全な設計と施工とが可能となるのである。

動的な信頼性設計をBayesian統計学と信頼性理論の立場からみれば以下の2点が特徴的である。

(1) 決定基準 ： 静的な設計原理によれば、ときとしては min－max 的決定基準（技術者にとって最も都合の悪い仮定にもとづく決定）に立つ必要があるのに対し、動的な設計原理にしたがえば Bayes 決定基準による統計資料の見方（未知な自然状態のありうる程度に着目する決定）がより説得性をもつ。

(2) いわゆる「主観的不明量」の取扱い ： 外力や強度の不確実性とは別に、力学理論そのものの誤差や施工の精度についての不確実性は、静的設計ではいわば技術者の「技量」だけによって表現される。しかし動的設計ではこの不確実性も施工中の観測によってより客観的なものに表現しなおされる。

上の動的な設計原理を盛土建設を例にとって説明する。この理由は、施工中の観測にもとづく斜面安定の予測過程がすでに得られているからである[1]。なお筆者らは、沈下－時間関係予測のため1次元圧密方程式の「観測的数値解法」をすでに開発しており、したがって沈下予測問題にもこの設計原理が適用可能なことを確めている。

2 施工中の斜面安定の観測にもとづく自然状態 $\underline{\theta}$ の確からしさの修正[2]・・・$\underline{\theta}$ が地盤強度の確率分布および解析誤差[2]の確率分布のパラメータをあわせて表わすものとする。施工前の土質調査および設計者の先験的な知見にもとづいて $\underline{\theta}$ の分布が施工前に $\xi(\underline{\theta})$ であらわされるとする。設計強度 a に対応する荷重まで盛土施工が進捗したとき、はじめてその盛土が破壊に接近している徴候を示したとすると、$\xi(\underline{\theta})$ は次式により修正される。

$$\xi(\underline{\theta}|a)=\frac{\partial P_F(\underline{\theta},a)/\partial a\cdot\xi(\underline{\theta})}{\int 分子\, d\underline{\theta}}\quad(1-a)$$

または

$$\xi(\underline{\theta}|a\sim a+\Delta a)=\frac{\{P_F(\underline{\theta},a+\Delta a)-P_F(\underline{\theta})\}\xi(\underline{\theta})}{\int 分子\, d\underline{\theta}},\quad \Delta a：観測誤差\quad(1-b)$$

ここに $P_F(\underline{\theta},a)$ は地盤の設計強度 a に対応する盛土の破壊確率であり、式(1)における設計強度 a（確率変数の

実測値）を施工中の情報と呼ぶ。$P_F(\theta,a)$ と $\xi(\underline{\theta})$ の $\underline{\theta}$ に関する内積は予測破壊確率と呼ばれる。

3 盛土の動的設計の定式化 ・・・ 設計の対象は軟弱地盤上の盛土であって、適切に選ばれた時間だけ圧密させて地盤強度の上昇を待つという工法がとられるとする。完成させねばならない盛土の高さは与えられているとする。そうすれば施工中にもし情報 a を得れば、そのあとどのくらいの期間地盤を圧密させればよいかが問題となる。この期間を a に対応して t と書き、a を N 回観測したとすれば、$a_i,\ i=1\cdots N$ が施工中の観測による情報（の時系列），$t_i,\ i=1\cdots N$ が決定系列である。設計の評価はつぎの損失関数

$$L(\theta_N, t_1, t_2, \cdots, t_N) = C_c(t_1, t_2, \cdots t_N)+C_F(t_1, t_2 \cdots t_N)P_F(\theta_N, H) \qquad (2)$$

の $\underline{\theta}_N$ に関する期待値でなされる。ここに C_c は建設費用、C_F は破壊もしくは工期遅れにともなう費用、$\underline{\theta}_N$ は N 期の自然状態、H は完成させるべき盛土の高さである。$\underline{\theta}_N$ は、つぎの自然状態の遷移の関係[3] $\underline{\theta}_{i+1}=T[\underline{\theta}_i, a_i, t_i]$ を再帰的に用いて $\underline{\theta}_N = T[\underline{\theta}, (a_i, t_i)\ i=1\cdots n]$ によって求められる。ここに $\underline{\theta}$ は初期状態であり、最終段階におけるベイズリスク（(2)の $\underline{\theta}$ に関する期待値）は

$$V_N = \int \xi(\underline{\theta}|a_{N-1})\, L(\underline{\theta}_N, t_1, t_2, \cdots t_N)\, d\underline{\theta} \qquad (3)$$

で表わされる。ここに $\xi(\underline{\theta}|a_{N-1})$ は、式(1)の再帰的適用によって得られる（ただし情報時系列 $a_1,\cdots a_N$ の独立性を仮定している）。V_N を $N-1$ 段階で計算すれば、

$$V_{N-1} = E[V_N] = \int p(a_{N-1})\, V_N\, da_{N-1} \quad (4\text{-}a) \qquad \text{または} \quad V_{N-1} = \sum_{a_{N-1}} Prob.\,(a_{N-1}<a<a_{N-1}+\Delta a)\, V_N \quad (4\text{-}b)$$

ここに

$$p(a_{N-1}) = \int_{\Theta} \frac{\partial P_F(\underline{\theta}, a_{N-1})}{\partial a_{N-1}}\, \xi(\underline{\theta}|a_{N-2})\, d\underline{\theta} \qquad (5\text{-}a)$$

$$Prob.\,(a_{N-1}\le a \le a_{N-1}+\Delta a) = \int_{\Theta} \{P_F(\underline{\theta}, a_{N-1}+\Delta a) - P_F(\underline{\theta}, a_{N-1})\}\, \xi(\underline{\theta}|a_{N-2})\, d\underline{\theta} \qquad (5\text{-}b)$$

式(3)を式(4)に代入し式(5)を用いると、V_{N-1} は簡単に整理されてつぎのようになる。

$$V_{N-1} = \iint \frac{\partial P_F(\underline{\theta}, a_{N-1})}{\partial a_{N-1}}\, \xi(\underline{\theta}|a_{N-2})\, L(\theta_N, t_1 \cdots t_N)\, d\underline{\theta}\cdot da_{N-1} \qquad (6\text{-}a)$$

または

$$V_{N-1} = \sum_{a_{N-1}} \int_{\Theta} \{P_F(a_{N-1}+\Delta a, \underline{\theta}) - P_F(a_N, \underline{\theta})\}\, \xi(\underline{\theta}|a_{N-2}) \times L(\underline{\theta}, t_1, \cdots t_N)\, d\underline{\theta} \qquad (6\text{-}b)$$

さて、$(N-1)$ 段階ではそれまでの決定（施工履歴）$t_1, \cdots t_{N-1}$ および観測値 $(a_1, \cdots a_{N-1})$ が与えられているからこのもとで t_N を動かせば、V_{N-1} を最小にする t_N は、

$$t_N^* = t_N^*(t_{N-1}, \cdots t_1; a_{N-1}, \cdots a_1) \qquad (7)$$

のように過去の決定と観測値の関数となる。同様に順序よく backward に下れば一般に

$$t_i^* = t_i^*(t_{i-1}, \cdots t_1,\ a_{i-1}, \cdots a_1) \qquad (8)$$

が求まり、最適決定が情報時系列の関数として求まる（適応制御方式）。

4 結論 ・・・ 式(8)の解の系列を代入して、第0段階すなわち施工にとりかかる前からみたときのベイズリスクを計算すると、式(1-a),(1-b)に対応して、それぞれ

$$V_1^* = \int_{a_1}\int_{a_2}\cdots\int_{a_{N-1}}\int_{\Theta}\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{\partial P_F(\underline{\theta}, a_i)}{\partial a_i}\right)\xi(\underline{\theta})\, L(\theta_N, t_1^* \cdots t_N^*)\, d(\underline{\theta}, a_{N-1}, \cdots a_1) \qquad (9\text{-}a)$$

または

$$V_1^* = \sum_{a_1}\sum_{a_2}\cdots\sum_{a_{N-1}}\int_{\Theta}\left(\prod_{i=1}^{N}\{P_F(\underline{\theta}, a_i+\Delta a) - P_F(\underline{\theta}, a_i)\}\right)\xi(\underline{\theta})\, L(\underline{\theta}, t_1^*, \cdots t_N^*)\, d\underline{\theta} \qquad (9\text{-}b)$$

となる。これらの式に損失関数式(2)を代入すれば建設費用 C_c や破壊時もしくは工期遅延時の費用 C_F は $\underline{\theta}$ や施工中の情報時系列 $(a_1 \cdots a_{N-1})$ に依存しないから、$V_1^* = C_c + C_F E[P_F(\theta, H)]$ となることがわかる。ここに $E[P_F(\underline{\theta}, H)]$ は第0段階からみたときの $P_F(\underline{\theta}, H)$ の Bayes の意味における予測破壊確率である。もし工期制約, $t_1+\cdots+t_N = T$: const. 等があれば、$V_1^* = C_c + C_F \times \min_{t_1 \cdots t_N} E[P_F]$ となる。以上から結論できることは、動的な信頼性設計とはベイズの意味での予測破壊確率を施工中の情報にもとづいて常時計算していて、常にその最小化を目指して可能な設計変更をくりかえしてゆく過程であるということである。

〔参考文献〕1) 松尾・浅岡 第12回土質工学研究発表会 2) Matsuo・Asaoka, Soils and Foundations Vol.16 No.1, 3) 松尾・浅岡, 土木学会論文報告集第240号 1975.