

京都大学工学部 学生員 古市 徹
同 上 正員 平岡正勝
同 上 正員 池田有光

1. はじめに. 本研究の目的は, 環境汚染問題を分布定数系の予測と制御としてとらえ種々の問題を整理しつつその解析手法についてまとめることにある. 今回は特に, 大気汚染の総量規制において重要となるバックグラウンドの推定に關して, 移流項・外力項がある数学モデルでの推定手法について新しく知見が得られたので報告する.

2. 推定・同定問題 分布定数モデルは, 物理現象をより忠実に表現しているにもかかわらず避けられてきたようである. その主な理由は, 問題によって数学モデルおよび解析手法が異なることである. すなわち, 分布定数系に対して何らかの結果を得たとしても, それはその時使用した数学モデルを前提としてのものであり, 数学モデルが別の形になればその手法はもう通用しないことである. しかし, モデリングさえしっかりしていれば, 推定・同定に關していくつかの問題に分類でき, 多種多様な手法についても整理できるものとする. Table-1に整理した結果を示す. 更に, 現実の観測データとの係わりを考えると観測モデルを如何に表現するかということ, また評価関数をどのようにとるかということも大事なことであり, それについてはTable-2に概要を示している.

Table-1. 文献の位置付け.

問 題 手 法	推 定			同 定			
	汚染濃度分布	汚染源強度	初期値 (6/7/75)	汚染源位置	最適観測点	移流・外力項	拡散係数
カルマンフィルター	○	○		○	○		○
最小二乗法	○	○	○		○		○
Bayes 則	○			○			○
積分方程式	○						
確率近似	○				○		○
統計モデル	○						
GMDH	○						
Riccati	○		○			○	
差分	○				○		
ガウシヤ法	○						

Table-2. 分布系の観測モデル.

測定空間	観測モデル	簡略化観測モデル	評価関数
(t, x)	$y(t, x) = \int_a^b h(t, x, C(t, x)) dx + \xi(t, x)$	$y(t) = \int_a^b H(x, t) C(x, t) dx + \xi(t)$ $H(x, t) = \sum_{i=1}^n h_i(x, t) \delta(x - x_i)$ $y(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) C(x_i, t) + \xi(t)$	A. $J = \int_0^T \int_a^b y_i^2(t) dx_i dt$ B. $J = \int_0^T \int_a^b \xi_i^2(t) dx_i dt$
(t)	$y(t) = \int_a^b h(t, x, C(t, x)) dx + \xi(t)$	① 全観測 $H(x, t) = \sum_{i=1}^n h_i(x, t) \delta(x - x_i)$ $y(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) C(x_i, t) + \xi(t)$	
(x)	$y(x) = \int_0^T h(t, x, C(t, x)) dt + \xi(x)$	② 点観測 $H(x, t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) \delta(x - x_i)$ $y(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) C(x_i, t) + \xi(t)$	
$(\cdot)$	$y = \int_0^T \int_a^b h(t, x, C(t, x)) dx dt + \xi$	③ 観測値なし $H(x, t) = 0, y(t) = 0$	

3. 大気汚染での問題 大気汚染を例にとって, Table-1の問題が具体的にどのようなことを意味した解決されるべきかを考えてみる. (1)汚染濃度分布. 非物理モデルは, (a)気象条件, 流れ場, モデルパラメータに關しての情報不足, (b)短時間予測, (c)オンライン処理などの場合には有効な方法であり, 自己回帰モデル等多くの統計モデルが提案されている. しかしデータの预处理に難点がある (例えば, 定常性の検定). また物理モデルと組合せて用いる方法が最近でできているようである. 例えば, カルマンフィルター (集中系) と多変量解析, 物理モデルと GMDH による数値的修正など. この方向は, 現実を考慮すると賢明であると考えられるが, 例えば集中定数系としてのカルマンフィルターの適用は, 大気汚染一般が物理の基礎法則に従う大気拡散現象であるという立場をとるならば物理的説明が付きにくい. よって分布定数系によるモデル化によって現象を精緻化する立場が, 測定技術等の向上とあいまって今後有望であると考えられる. 拡散式についても, 3次元問題 (定常) で変係数の場合でも Green 関数が解けておりさらに推定の説明が付きやすくなる. (2)汚染源強度. 定常点源については既に研究されているが, 未開拓で興味あるものとして定常線源がある. これは, 自動車による SO_x あるいは NO_x の濃度推定に対応するが, なかなか実態がつかみにくいという現実を考慮すると推定の意義がでてくる. (3)最適観測点. 既に多くの研究があるが, これはまさにモデルを分布定数系で記述することの merit であると考えられる. 評価関数として, 気象要素や排出源パラメータの変動が濃度分布に最も影響を与えるような点に観測点を置くと, 各種観測点の独立性を最大にするような配置をすることができると考えられる. また与えられた観測点をいくつまで減らすことができるのか, 逆に観測点をどこにいくつ増やすと予測精度がどれだけ

け向上するかという問題を考えるのも興味あると言える。(4) 拡散係数 拡散係数を確率変数と見なして推定したり、簡単な関数で近似する方法がある。これは本質的に流れ場の乱流構造と関係することであり、学問上あるいは現実問題として研究の価値があると考えられる。(5) 移流入項 分布定数系の境界条件として考慮されるものであり、例えば「京都市の大阪からの汚染寄与を推定することに相当する。以上のような問題以外にも考えられるが、次に初期値の推定についてより具体的に考えて見よう。

4. 初期値(バックランド)の推定

3次元拡散場での拡散方程式は(1)式で表現される。さて、ここでFig-1のように道路に垂直にx軸をとり、その方向に風速 $u (= \text{const.})$ で風が吹いているものとする。今、道路と平行に山があり、山と道路の間に住宅街がある場合を想定する。よって次の仮定をする。 $K_y = K_z = 0, V = W = 0$ 即ち、方程式(2)と境界条件(3)で数学モデルを構成する。道路

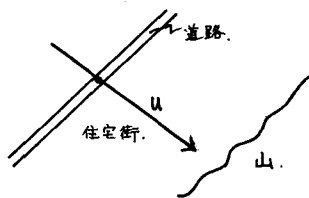


Fig-1. 現象モデル

からの汚染の寄与を評価するに当って、この地域での初期濃度を推定することは意義あることと言えよう。観測は(4)式のように離散時間毎に行なわれるものとする。観測点 y_k はサンプル

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial C}{\partial z}) + S \quad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} + g \cdot \delta(x - x_s) \quad (2)$$

但し、 g :一定排出強度、 x_s :汚染源位置、 $t > 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^1$
 $K = \text{const.}$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3)$$

$$z_k = C(k \Delta t, y_k) + m_k \quad (4)$$

但し、 $0 \leq y_k \leq L, k=1, \dots, N, m_k$:観測誤差

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{u}{K} \frac{\partial C}{\partial y} \quad (6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{u}{K} \frac{\partial C}{\partial z} \quad (7)$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y=L} = 0 \quad (8)$$

$$\{\lambda_n\} = \left\{ \frac{K \pi^2 n^2}{L^2} + \frac{u^2}{K} \right\} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

$$\{y_n(y)\} = \left\{ 1, \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{L} y, \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{L} y, \dots \right\} \quad (10)$$

$$\tilde{C}(t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-\lambda_n t} y_n(y) \quad (11)$$

$$\text{但し、} g_n = \int_0^L g(y) y_n(y) dy, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$C_1(t, x) = e^{-\frac{u}{K} x} \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-\lambda_n t} y_n\left(\frac{x}{K}\right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, x) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(t, x) - u \frac{\partial}{\partial x} U(t, x) \quad (14)$$

$$U(t, x) = g \cdot \delta(x - x_s) \quad t \geq 0 \quad (15)$$

$$C_2(t, x) = \int_0^t U(t-s, x) ds \quad (16)$$

$$C(t, x) = C_1(t, x) + C_2(t, x) \quad (17)$$

$$J_\varepsilon(g_n) = \sum_{k=1}^N [z_k - C(k \Delta t, y_k)]^2 + \varepsilon \int_0^L g_\varepsilon(x) dx \quad (18)$$

$\varepsilon > 0$

系(7)、(8)の固有値、固有関数は夫々(9)、(10)となる。

さて、任意の初期値 $g(y)$ ($y \in \Omega \subset \mathbb{R}^1$) に対して、 $\tilde{C}$ は(11)式のように展開できる。よって系(5)、(3)の解は(13)式となる。(14)式、(15)式のような $U(t, x)$ を考える。ここで(16)式のような $C_2(t, x)$ を考えると、これが初期条件が0の場合の(2)式の解であることは容易に確かめられる。($U(t, x), C_2(t, x)$ は境界条件(3)を満たしていることに注意。) 結局以上のことより、系(2)、(3)の解は(17)式のように求まった。ところで、系(2)、(3)、(4)は N 段出力可制御であることが示されるので、正則化の方法を使って、(18)式の評価関数を最小にする近似初期値 $g_\varepsilon(x)$ を求める。($g_\varepsilon(x)$ は観測データに連続的に依存している。) 実際の計算は(18)式に(17)式を代入することによって g_n の2次元形式になるので、非線形計画法によって数値解を求めることができる。適当な初期値を与えて本方法のvalidityを検証しているが、詳細は発表のときに示す。

5. あとがき 本方法は、他の環境汚染(例えば、水質汚濁)にも適用可能である。