II-270　流れの運動の表現について

日本大学工学部　正員　安田禎輔

まえがき　流体力学における運動の表現には，Lagrange的表現とEuler的表現の二つの表現方法がある。前者は，流体中のある特定な粒子に着目し，この粒子の運動を追跡する方法で，この運動方程式の表現は，質点力学の方法と全く同じに取扱える。後者は，流体中のある特定な点に着目し，この点において流体の運動を観測する方法で，この運動方程式の表現方法は，まさに流体力学固有の方法であるといわれている。

しかし，これらの二つの表現方式による運動方程式は，Newtonの運動の第二法則を原点にして導かれたものであるから，これらの二つの運動方程式を同時に表現できる式が存在するはずである。本報においては，これらの二つの表現方式を再確認し，併せて両者を同時に表現し得る第三の運動の表現方式を試みた。

§-1　運動の表現

運動の表現のそれぞれの方式を列記する

(1)　Euler的表現；任意の定点における速度$\mathcal{V}$を，時間tとこの定点の座標(x_0, y_0, z_0)との関数として表現する。したがって，時々刻々の速度はその定点を通過する流塊の速度を表現し，流塊を追跡することは不可能である。　$\mathcal{V} = \mathcal{V}(x_0, y_0, z_0, t)$

(2)　Lagrange的表現；時刻$t=t_0$において，任意の定点を通過する流塊を追跡する方法で，時刻$t=t$の流塊の位置を，tとこの定点の座標(x_0, y_0, z_0)との関数として表現する方法である。したがって，ある特定な点における時間的状態の変化，すなわち，その点の歴史や未来を究明するのは困難である。$\mathcal{R} = \mathcal{R}(x_0, y_0, z_0, t)$，$\mathcal{V} = \mathcal{V}(x_0, y_0, z_0, t)$

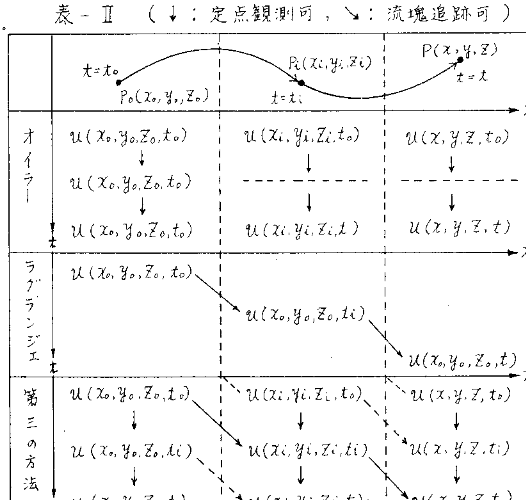
(3)　第三の表現：その他の表現方法として，Euler的方法のように定点観測もでき，かつLagrange的方法のように流塊追跡も可能な表現方法が考えられるはずである。すなわち，ある時刻$t=t_0$において任意の点(x_0, y_0, z_0)を通過する流塊の任意の時刻$t=t$における速度$\mathcal{V}$を，時刻tとこの流塊の現在位置(x, y, z)との関数，すなわち，$\mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z, t)$，$\mathcal{R} = \mathcal{R} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{V}\,dt$　と表現すれば上記目的が達成される。この関係はLagrangeの表現(2)の第1式より(x_0, y_0, z_0)を求め第2式に代入して求められる。

表-I,IIは，上記三つの表現方式を図表化したものである。

表-I　(○：可，△：困難，×：不可)

表現方法	独立変数	助変数	従属変数		観測法		流塊追跡
					定点	全体	
Euler	x_0, y_0, z_0, t		u, v, w	p, ρ	○	○	×
Lagrange	〃		x, y, z	〃	×	△	○
第三の方法	〃	x, y, z	u, v, w	〃	○	○	○

表-II　(↓：定点観測可，↘：流塊追跡可)



§-2　流体粒子の加速度の表現

時刻$t=t_0$において，$P_0(x_0, y_0, z_0)$点にあった流体粒子が時刻$t=t$において，$P(x, y, z)$点へ移動したとすれば，P点の座標は，第三の表現方式により次式で示される。ただし，u, v, wは，x, y, z方向の流速とする。

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{t_0}^{t} u(x, y, z, t)\,dt \\ y &= y_0 + \int_{t_0}^{t} v(x, y, z, t)\,dt \\ z &= z_0 + \int_{t_0}^{t} w(x, y, z, t)\,dt \end{aligned}\right\} \text{------}(1)$$

(1)式のx_0, y_0, z_0は初期条件(物質座標)であり，tが独立変数，x, y, zは従属変数である。

流速のx, y, z 成分は，(1)式を微分して

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} &= v(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} &= w(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \text{---------- (2)}$$

加速度のx, y, z 成分は，以下順に

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ \alpha_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ \alpha_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \text{----- (3)}$$

x, y, z方向の単位ベクトルをi, j, kとし，加速度αをベクトル表示すると，以下のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha &= i\alpha_x + j\alpha_y + k\alpha_z \\ &= \left(i\frac{\partial u}{\partial t} + j\frac{\partial v}{\partial t} + k\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \left\{(iu + jv + kw)\cdot\left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}iu + \left\{(iu + jv + kw)\cdot\left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}jv \\ &\quad + \left\{(iu + jv + kw)\cdot\left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}kw = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)iu + (\mathbf{v}\cdot\nabla)jv + (\mathbf{v}\cdot\nabla)kw \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \text{ ------- (4)}$$ ただし，$\mathbf{v} = iu + jv + kw$ とする。

さて，加速度の式(3)および式(4)は，Euler の加速度の式と型式上，全く同じ形になっているが，Euler の式とは意味が全く異なるのである。すなわち，Euler の式のx, y, zは，本報におけるx_0, y_0, z_0に相当するものであり，(3)または(4)式において$t=t_0$とした場合の式である。当然，Euler の式においては，x, y, z とtとは互に独立であるから，$dx/dt, dy/dt, dz/dt$などは，なんの意味もないが，本報においては，x, y, z方向の流速を意味する。

§－3 運動方程式

運動している流塊を含む微小な閉曲面δS(体積δV)内の流体に，Newton の運動の第二法則$F = m\alpha$ を適用する

ここで，$F = F_m + F_S$ であり，R：$R = iX + jY + kZ$単位質量当りの質量力　n：面素$d(\delta S)$の単位法線ベクトル，とすると，各項は次式となる。

表面力：Gauss の発散定理を用いて，$F_S = -\iint_{\delta S} pn\,d(\delta S) = -\iiint_{\delta V} \nabla p\,d(\delta V)$

質量力：$F_m = \iiint_{\delta V} R\rho\,d(\delta V)$　　慣性力：$M\alpha = \iiint_{\delta V} \alpha\rho\,d(\delta V)$，$\alpha = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$

したがって，次式の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = R - \frac{1}{\rho}\nabla p \text{ -------- (5)}$$

上式をx, y, z成分で表わせば

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ &\text{— — — — — — — — — — — — — —} \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \text{----- (6)}$$

上式は，加速度のところで説明したように，型式的には，Euler の運動方程式と全く同形となっているが，内容が異なるのである。すなわち，Euler の式は，(6)式において，$t=t_0$とした場合の次式となる。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial t_0} + u_0\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial y_0} + w_0\frac{\partial u_0}{\partial z_0} = X_0 - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_0} \\ &\text{— — — — — — — — — — — — — — — — — —} \\ &\frac{\partial w_0}{\partial t_0} + u_0\frac{\partial w_0}{\partial x_0} + v_0\frac{\partial w_0}{\partial y_0} + w_0\frac{\partial w_0}{\partial z_0} = Z_0 - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial z_0} \end{aligned}\right\}$$

したがって，(1)～(6)式は，粒子の運動を追跡することもできるし，$t=t_0$とおけば，流体の運動を定点$P_0(x_0, y_0, z_0)$で観測することもでき，Lagrange 的運動の表現も，Euler の運動方程式も両方同時に表現している式となる。