

高知高専 正員 那須 浩平

1. 予えがき

砂礫の管路輸送に関連して、現在ではDurandの実験式が極めて信頼性が高く、最も広く使用されている。

Durandは、管径 $D=40\sim580\text{mm}$ 、粒径 $d=0.2\sim25\text{mm}$ 、流送濃度 $C=2\sim22.5\%$ という広範囲な流送条件のもとに310の測定値を得て、その全てが統一的に次の様な式で表わされる事を見出した。

$$i = i_w(1 + C\varphi) \quad \text{--- (1)}$$

$$\varphi = \frac{i - i_w}{C i_w} = 81 \left[\frac{V^2 \sqrt{C_b}}{gD(\rho_s/\rho - 1)} \right]^{\frac{3}{2}} \quad \text{--- (2)}$$

但し、 i ：砂水混合体を流送している時の動水勾配、 i_w ：混合体と同じ流速で清水のみを流した場合の動水勾配、 C ：流送された混合体の砂の体積濃度、 V ：平均流速、 C_b ：砂粒の抗力係数、 ρ_s 、 ρ ：砂と水の密度、 g ：重力加速度、 D ：輸送管径である。なを、この式は管底に静止堆積層が生じない範囲を対象としている。また、この式は多くの研究者によって、その妥当性が確認されている。しかし、この式の理論的根拠については、未だに説明がなされていない。

本報はDurandの実験式の理論的解明と改善を意図して、円管内の流砂機構を考察したものである。

この際(2)式を、 $\varphi = \alpha(F_r)^3$ 、 $F_r = V/\sqrt{gD(\rho_s/\rho - 1)}$ --- (3)と表わす事にする。但し、 $\alpha = 81/C_b^3$ である。

2. 堆積開始限界状態と、そのモデル化

Durandの実験式の根拠となる力学的機構を明らかにするために、次の仮定のもとに現象をモデル化した。

一般に動水勾配 i と管内流速 V との関係を両対数紙上に表わすと、典型的な変化の様子は図-1の様である事が実験的に確かめられている。図-1において、 i が最小となるA点の左側では堆積砂が管底に存在し、右側では存在しない。またA点附近では極く僅かな i の変動により V が大きく変動する。そのために、この近傍では管底の砂層が断続的に滑動したり停止したりする状態が起りやすい。A点での流況をモデル化して示したものが図-2である。即ち、管断面を浮遊砂部分と掃送砂部分とに分ける事は従来の方と法と同じであるが、本解析においては掃送部分を更に分けて考えた。

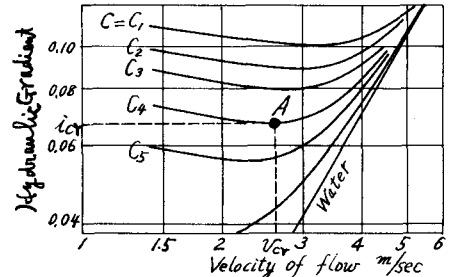


図-1 動水勾配と平均流速との関係

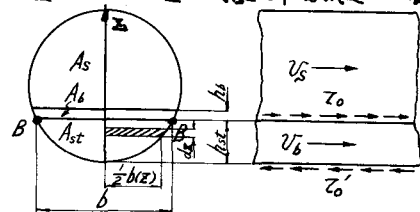


図-2 解析に用いたモデル

その一つは管底の凹形固定床に沿って停止と滑動を間欠的に繰り返しながら移動するか、またはその可能性を常に蔵しながら静止、あるいは滑動の状態を持続すると考えられる部分で、図-2のAstで表わされるが、その表層B-Bには常に一定のせん断応力が作用しているものとする。他の一つは、上記のAst表層B-Bに沿って移動を続けている部分で、ここでは停止は起らない(図-2のA0)。主流が及ぼすせん断応力を直接にAst表層に作用させる働きをする部分で、このせん断応力によりAst部分が滑動を継続する。また、図-1のA点で、管底の砂層が停止直前の状態で移動している時も、始動直前の状態で静止している時も、両者はほぼ等しい体積濃度を有するものとする。

ところで、Ast(図-2)の表層の中央附近に作用しているせん断応力は、次の様に書き表わせる。

$$\tau_0 = \mu_{st} C_b (\rho_s/\rho - 1) g h_{st} \quad \text{--- (4)}$$

ここに、 C_b ：堆積状態の体積濃度、 μ_{st} ：管底壁面と砂層との間の動摩擦係数、 h_{st} ：Astの高さ(図-2)。

Astが静止直前で滑動を続けている場合を考へ、簡単のために等速で移動しているものと仮定すると

$$\tau_0 = \tau_c \quad \text{--- (5)}$$

とする事が出来る。ここに、 τ_c ：砂層Astと管底壁面と

の間の摩擦応力である。管壁に作用するせん断応力を円周方向に対して近似的に一樣と考えると

$$\tau_0 = \rho g R \lambda_{cr} = \rho g \cdot D/4 \cdot \lambda_{cr} \quad \text{--- (6)}$$

と与えられる。ここに、 R : 半径である。(4)(5)(6)から

$$h_{st} = D \lambda_{cr} / 4 C_b (\rho_s/\rho - 1) \mu_s \quad \text{--- (7)}$$

が得られる。つぎに A_{st} の面積を考えると、まず

$$b(x) = 2 \sqrt{Dx} (1 - x/D)^{1/2} \quad \text{--- (8)}$$

であるから、 A_{st} は近似的に次の様に表わせる。

$$A_{st} = \int_0^{h_{st}} b(x) dx \approx \frac{1}{6} D^2 \left[\frac{\lambda_{cr}}{C_b (\rho_s/\rho - 1) \mu_s} \right]^{3/2} \quad \text{--- (9)}$$

つぎに、 A_b の厚さ h_b (図-2) の算定には Bagnold⁽²⁾ の方法を用いる事にする。茅田・道上⁽³⁾ は開水路の掃流砂量の算定に際して、砂粒の限界掃流力も考慮しているが、本解析においては、堆積状態に近い濃度の砂層がある厚さで、管底の固定床面に沿って押し流すせん断応力に較べて、限界掃流力は無視し得ると考えて

$$h_b = D \lambda_{cr} / 4 C_b (\rho_s/\rho - 1) \mu_s \quad \text{--- (10)}$$

と表わす事にする。従つて、 A_b は次の様に書き表わす

$$A_b = b h_b = \frac{D^2}{4} \frac{1}{\mu_s \mu_s^{1/2}} \left[\frac{\lambda_{cr}}{C_b (\rho_s/\rho - 1)} \right]^{3/2} \quad \text{--- (11)}$$

ここに、 μ_s : 砂粒子と砂面の間の動摩擦係数である。

$$\text{掃流砂量 } Q_B \text{ は } Q_B = (A_{st} + A_b) V_b \quad \text{--- (12)}$$

と書く事にして、ここに $V_b = \alpha_0 U_*'$ ($U_*' = \sqrt{\tau_0/\rho}$) として

$$Q_B = \frac{\alpha_0 D^5}{4 (\rho_s/\rho - 1)^{1/2}} \left(\frac{g}{C_b \mu_s} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{3 \mu_s} + \frac{1}{2 \mu_s} \right) \lambda_{cr}^2 \quad \text{--- (13)}$$

つぎに流速砂量 Q_s は、

$$Q_s = A_s U_s C_s \quad \text{--- (14)}$$

で与えられる。ここに、 $C_s = A_s$ (図-2) の断面平均流速砂

濃度。ここに λ_{cr} を、

$$\lambda_{cr} = \lambda_f + \lambda_b + \lambda_s \quad \text{--- (15)}$$

と表わす。ここに、 λ_f は管壁と流体の摩擦による、 λ_b

は砂層が褶皺する、 λ_s は砂が流速するため、それぞれ

の原因によって生じるエネルギー勾配である。(15)から

C_s を逆算し、さらに、 $U_s/w_0 = \alpha_1$ (w_0 は沈降速度) と

流体抵抗係数 f を導入して (14) に代入すると

$$Q_s = \frac{\alpha_1 D^5}{2 (\rho_s/\rho - 1)^{1/2}} \left(\frac{g}{C_b \mu_s} \right)^{1/2} \left[\frac{2}{3 f} - \frac{\mu_s}{2} \left(\frac{1}{3 \mu_s} + \frac{1}{2 \mu_s} \right) \alpha_0^2 \right] \lambda_{cr}^2 \quad \text{--- (16)}$$

が求まる。全流速砂量 Q は

$$Q = Q_B + Q_s \quad \text{--- (17)}$$

である。以上で、 τ_0 、 τ_0' 、 h_{st} 、 A_{st} 、 h_b 、 A_b 、 Q_B 、 Q_s 、

Q の全てが (5)、(6)、(7)、(9)、(10)、(11)、(13)、(16)、(17) の諸式

によって、 λ_{cr} のみの関数として表わされた事になる。

ところで、 λ_{cr} とは図-1 から明らかな様に、一定の

λ が与えられた場合 (即ち、ポンプの揚程と輸送距離が定められた場合)、その値の λ で流し得る最大の濃度の砂を流している時に、その λ は必然的に $\lambda = \lambda_{cr}$ となるのである (図-1 の A 点の λ)。即ち、 λ_{cr} は常に最大濃度 C_{max} に対応しているものであり、 C_{max} を得るための条件が、同時に λ_{cr} を与える条件に一致する結果となる。

3. Durand の実験式との比較

Durand の実験式 (2) は、堆積を生じない全ての範囲に当てはまるものである。一方、筆者のモデルは最大流速濃度 (図-1 の A 点) を対象としたものである。従つて両者を比較するためには、最大流速量を与える式を、Durand の式 (2) から導き、それを筆者のモデルから得られた式 (17) と比較する事を以下に考える。従つて、このためには、まず (2) と (3) から流速濃度を表わす式

$$C = \frac{(Fr)^3}{\alpha} \left[\frac{2 \lambda}{f (Fr)^2 (\rho_s/\rho - 1)} - 1 \right] \quad \text{--- (18)}$$

を導き、上式から

$$2 C / \alpha Fr = 0 \quad \text{--- (19)}$$

の条件により、 C_{max} を与える Fr の値が得られる。また前述の理由により、この時の λ が λ_{cr} であり、更にこの時の V が U_{cr} である (図-1)。(19) の条件から、

$$\frac{U_{cr}}{\sqrt{g D (\rho_s/\rho - 1)}} = \left[\frac{2 \lambda_{cr}}{3 (\rho_s/\rho - 1) f} \right]^{1/2} \quad \text{--- (20)}$$

$$C_{max} = \frac{2}{\alpha} \left[\frac{2 \lambda_{cr}}{3 f (\rho_s/\rho - 1)} \right]^{3/2} \quad \text{--- (21)}$$

の二つの式が求まり、これを $Q_0 = \pi D^2/4 \cdot U_{cr} \cdot C_{max}$ に代入する。但し、 $U_{cr} \cdot C_{max}$ を与える流速である。従つて

$$Q_0 = \frac{2 \pi D^5}{9 \alpha f^2 (\rho_s/\rho - 1)^{3/2}} \lambda_{cr}^2 \quad \text{--- (22)}$$

が求まる。上式を筆者のモデルから導いた式 (13)(16)(17) の諸式と比較しても可成りの一致が見られる。筆者のモデルは、Durand 式を理論的に説明するうえで、ほどきであった様に思われる。また、実験式 (3) の係数は

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{9 f^2}{8 \pi (\mu_s C_b)^{1/2}} \left[\frac{4 \alpha_1}{3 f} + \alpha_0 \left(\frac{1}{3 \mu_s} + \frac{1}{2 \mu_s} \right) (1 - \alpha_1 \mu_s) \right] \quad \text{--- (23)}$$

となり、Durand の実験式の係数は上式の幾分内容である。

謝辞：本研究に当つて、永年にわたつて懇切な御指導を賜つた、中央大学の林泰造教授に深く感謝の意を表す。文献：1) Durand, R.: Proc. Minnesota Internat. Hyd. Conv., I.A.H.R. (1952), 2) Bagnold, R.A.: Phil. Trans. Royal Soc. London, (1957), 3) 茅田和道・道上正規：土木学会論文集, 206号, 1972