II-252　地下水の最適取水について

九州大学　正会員　上田　年比古
〃　学生員　○長野　裕徳
〃　正会員　神野　健二

まえがき、　本報では、井戸群による被圧地下水の定常取水における地下水位を有限要素法により解析し、これを実験結果と比較し、次いでこの有限要素法による解析手法を用いて、地下水位、揚水量の与えられた限界値のもとで、最適取水について検討したものである。

1. 有限要素法による解析　従来より地下水の取水問題では、差分法のシュミレーションが多く用いられているが、有限要素法が複雑な境界形状に有用であり、水頭分布と井戸群の取水量とをマトリクスで線型形式に表示できるので、ここでは、有限要素法による解析を試みた。基礎式は、$u=-k\,\partial h/\partial x$ ·(1)，$v=-k\,\partial h/\partial y$ ·(2)，$\partial u/\partial x+\partial v/\partial y=-(1/h_0)\cdot\sum_{m=1}^{N}Q_m\delta(x-\xi_m)\delta(y-\eta_m)$ ·(3) であり、(1)(2)(3)式より、$\partial(k\,\partial h/\partial x)/\partial x+\partial(k\,\partial h/\partial y)/\partial y=(1/h_0)\sum_{m=1}^{N}Q_m\delta(x-\xi_m)\delta(y-\eta_m)$ ·(4) ただし、u, v：x, y 方向の浸透流速　k：透水係数　h_0：被圧帯水層の厚さ　δ：デルタ関数　(ξ_m, η_m)：井戸 m の座標である。(4)式に対応する汎関数は、$\chi(h)=\frac{1}{2}\iint k\{(\partial h/\partial x)^2+(\partial h/\partial y)^2\}dx\,dy-\iint(\frac{1}{h_0})\sum_{m=1}^{N}Q_m\delta(x-\xi_m)\delta(y-\eta_m)dx\,dy$ ·(5) となる。いま図-1のような境界 B_1, B_2 で $h=H_1$, $h=H_2$ ·(6) 境界 B_3, B_4 で $\partial h/\partial n=0$ ·(7) の境界条件をもつ被圧浸透領域を考え、これを図のように任意の三角形要素に分割する。この場合、以後の取扱いに便利なように井戸（●印）を節点にとりその番号を順に 1, 2, …, N とし次に N+1 からの番号は、一般の節点につけ、境界 B_1, B_2 の節点は通し番号の最後に集める。以上により有限要素法による水頭分布と取水量の関係は、次の連立方程式として示される。$\mathbb{A}\mathbb{h}=\mathbb{F}\mathbb{Q}$ ·(8) (8)式による地下水頭の算定結果と実験結果を図-2に示す。実験は縦 135cm、横 75cm 帯水層厚 15cm の水槽で図-2に記載の各井戸取水量 Q（井戸位置は図-1の●印）と H_1, H_2 の条件のもとで定常取水を行い、図-1の○印位置のマノメータにより測定したものである。また、シュミレーションは、これと同じ条件で行ったもので、透水係数は、実測した値 0.385 cm/sec を用いた。図-2によると、計算値と実測値とは、ほぼよい一致を示している。

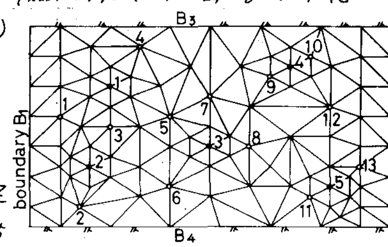


図-1 被圧浸透領域
（●：井戸，○水頭算定位置）

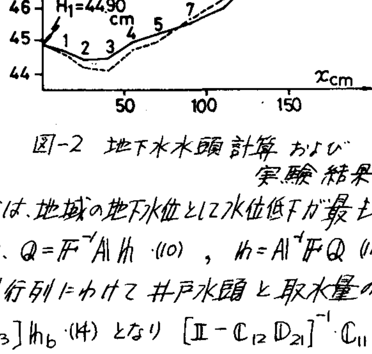


図-2 地下水水頭計算および実験結果

2. 広域地下水場の特性量　(8)式で係数行列 $\mathbb{A}$, $\mathbb{F}$　取水量 $\mathbb{Q}$　水頭 $\mathbb{h}$ を井戸，任意節点，および境界についての小行列にわけると、

$$\begin{pmatrix}\mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13}\\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23}\\ 0 & 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{h}_w\\ \mathbb{h}_r\\ \mathbb{h}_b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{F}_{11} & \mathbb{F}_{12} & \mathbb{F}_{13}\\ \mathbb{F}_{21} & \mathbb{F}_{22} & \mathbb{F}_{23}\\ 0 & 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{Q}_w\\ \mathbb{Q}_r\\ \mathbb{h}_b\end{pmatrix} \quad \cdot(9)$$

（$\mathbb{I}$：単位行列）となる。ただし、添字 w, r, b はそれぞれ井戸，任意節点，境界を示す。ここで $\mathbb{Q}_r$ は、帯水層からの漏水量に対応する定数項であるがここでは、$\mathbb{Q}_r=0$ とする。

さて、現在過剰揚水による地下水位の低下が問題となっていることから、ここでは、地域の地下水位として水位低下が最も大きい井戸の水位と取水量との関係式を求めてみよう。いま(8)式を変形して、$\mathbb{Q}=\mathbb{F}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{h}$ ·(10)，$\mathbb{h}=\mathbb{A}^{-1}\mathbb{F}\mathbb{Q}$ (11) とし、$\mathbb{F}^{-1}\mathbb{A}=\mathbb{C}$ ·(12)，$\mathbb{A}^{-1}\mathbb{F}=\mathbb{D}$ ·(13) とおき $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ を(9)式と同様に小行列にわけて井戸水頭と取水量の関係を示すと、$\mathbb{Q}_w=[\mathbb{I}-\mathbb{C}_{12}\mathbb{D}_{21}]^{-1}\mathbb{C}_{11}\mathbb{h}_w+[\mathbb{I}-\mathbb{C}_{12}\mathbb{D}_{21}]^{-1}[\mathbb{C}_{12}\mathbb{D}_{23}+\mathbb{C}_{13}]\mathbb{h}_b$ ·(14) となり $[\mathbb{I}-\mathbb{C}_{12}\mathbb{D}_{21}]^{-1}\cdot\mathbb{C}_{11}=\mathbb{P}$ ·(15)，$[\mathbb{I}-\mathbb{C}_{12}\mathbb{D}_{21}]^{-1}[\mathbb{C}_{12}\mathbb{D}_{23}+\mathbb{C}_{13}]\mathbb{h}_b=\mathbb{B}$ ·(16) とすれば、$\mathbb{Q}_w=\mathbb{P}\mathbb{h}_w+\mathbb{B}$ (17) となる。ここで $\mathbb{P}$ は、(15)式からわかるように地下水場における井戸の位置と透水係数とからなり各井戸水頭がある井戸の取水量に与える影響項である。$\mathbb{B}$ は、(16)式より井戸と境界の位置関係と境界水位とからなり、境界がある井戸の

取水量に与える影響項である。すなわち、ある地域の井戸取水量 $\mathbb{Q}_w$ と井戸水頭 $\mathbb{h}_w$ との関係式は(17)式に示すように $\mathbb{P}$, $\mathbb{q}$ という地域固有の係数行列による簡単な式形にまとめられる。

3. 線形計画法による最適取水.　　世下水の最適取水では、過剰揚水により発生する水位の異常低下などの種々の問題点を検討して計画する。ここでは柴崎ら[1]のいう持続性揚水量を定常取水量にとり各井戸にそれぞれこの定常取水量の最低限界をおくことにし、これを低限界取水量 $(\mathbb{Q}_w^*)$ とする。また、井戸の許容の最低水位を低限界水頭とする。したがって考える地域から世下水の揚水障害を発生させない範囲で最大の総取水量をうる最適取水の問題は、 $\mathbb{h}_w \geq \mathbb{h}_w^*$ (18)　$\mathbb{Q}_w \geq \mathbb{Q}_w^*$ (19) のもとで $g=\sum_{m=1}^{N} Q_m \Rightarrow max$ (20) となる。さらに $\mathbb{h}_w-\mathbb{h}_w^*=\mathbb{h}_w'$ として $\mathbb{h}_w'$ を変数とし(17)式より $\mathbb{P}\mathbb{h}_w^*+\mathbb{q}=\mathbb{P}_0$ (21) とおけば、この問題は、(i)制約条件 $\mathbb{Q}_w=\mathbb{P}\mathbb{h}_w'+\mathbb{P}_0 \geq \mathbb{Q}_w^*$ (22), $\mathbb{h}_w' \geq 0$ (23) (ii)目的関数 $g=\sum_{m=1}^{N} Q_m = \mathbb{U}\mathbb{h}_w'+G \Rightarrow max$ (24) である線形計画問題に帰着される。ここで(22)式からわかるように $\mathbb{P}$ は井戸 i の水頭が単位の上昇したとき井戸 j の取水量の増加量を示している。この値の大きいことは、i, j の井戸相互の影響が大きいことを示している。ある井戸 j の $\mathbb{P}_0$ はすべての井戸水頭が低限界水頭になったとき $(h_w'=0)$ の井戸 j の取水量を示している。また、g が(22)式に示される Q_w の和であることから $\mathbb{U}$ は $\mathbb{P}$ の列の和からなる行ベクトル、G は $\mathbb{P}_0$ の和である。この問題は Simplex法(双対定理)[2]を用いて最適解がえられる。いま、図-1の世下水場モデルにおける算定例を示す。境界条件は図-1,2と同じとし、低限界水頭はここではすべての井戸で同じにし $h_w^*=20.0_{cm}$ とする。固有係数 $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_0$ 及び $\mathbb{U}$, G を表-1に示す。$\mathbb{P}$ は対角要素が負の値をとり、他はすべて正の値の対称行列である。これは、各井戸の取水量は、その井戸の水頭を下げ、他の井戸の水頭を上げるほど増すことを示している。また $\mathbb{P}_0$ は、定水頭の境界 B_1, B_2 から遠い井戸3が小さくなっている。なお $\mathbb{U}$ の値がすべて負の値であることから総取水量 (g) を大きくするには、(24)式から各井戸の水頭は小さいほど有利であり、$h_w'=0$ のときが最大で、このとき $g=G=671.519$ (表-1)となる。これは、この地域の最大可能取水量と考えられる。このときの各井戸の取水量は、表-1の $\mathbb{P}_0$ に示される。

表-1　$\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_0$, $\mathbb{U}$, G の値

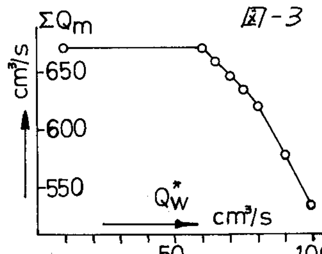
j \ i	P 1	2	3	4	5	P_0
1	-9.686	1.894	1.669	0.800	0.226	128.065
2	1.894	-10.480	1.503	0.297	0.240	163.785
3	1.669	1.503	-8.854	1.971	1.537	59.470
4	0.800	0.297	1.971	-8.598	1.072	130.912
5	0.226	0.240	1.537	1.072	-9.466	189.287
U	-5.097	-6.547	-2.174	-4.459	-6.390	671.519

表-2 最適取水算定結果

Case	Q_w^*	Q_m 1	2	3	4	5	ΣQ_m
1	10	128.1 ●	163.8 ●	59.5 ●	130.9 ●	189.3 ●	671.5
2	60	128.3 ●	169.9 ●	60.0 ●	128.6	189.6 ●	670.3
3	65	130.3 ●	164.6 ●	65.0 ●	106.8	192.3 ●	659.0
4	70	132.3 ●	165.4 ●	70.0 ●	85.0	195.0 ●	647.7
5	75	119.2	168.5 ●	75.0 ●	75.0	196.7 ●	634.5
6	80	86.8	174.7 ●	80.0 ●	80.0	197.2 ●	618.8
7	90	90.0	176.0 ●	90.0 ●	90.0	129.7	575.7
8	100	100.0	130.2	100.0 ●	100.0	100.0	532.2

いま、低限界取水量を各井戸で同じとし、この量を変えた場合の最適取水量と総取水量の算定結果を表-2に示す。●印は、井戸水頭が低限界水頭に等しいことを示す。これより、各井戸の低限界取水量がその井戸の $\mathbb{P}_0$ より小さい場合には、各井戸は取水量の制約をうけず、その最適取水状態では、井戸水頭はすべて低限界水頭に等しく取水量は、その井戸の $\mathbb{P}_0$ となり、総取水量は最大可能取水量となる。次に、低限界取水量(ここでは各井戸同じとしている。)がある井戸の $\mathbb{P}_0$ をこえる場合は、その井戸の不足水量 $(\mathbb{Q}_w^*-\mathbb{P}_0)$ を補うために、その井戸に影響の大きな井戸の水頭が上昇し、それにつれて各井戸の取水量が変化する。例えば表-2のCase 2では $\mathbb{Q}_w^*=60.0$ であるため井戸3が制約をうけ、表-1の $j=3$ の行で $\mathbb{P}$ の値の大きい井戸4の水頭が上昇し井戸3は $Q_3=60.0$ が保持されている。このとき総取水量は、670.3となり減少する。図-3は表-2の $\mathbb{Q}_w^* \sim \Sigma Q_m$ の関係図であり、前述のように $\mathbb{Q}_w^*$ が増して、$\mathbb{Q}_w^*$ より小さな $\mathbb{P}_0$ をもつ井戸が生じると最適取水における総取水量は減少することがわかる。

図-3



低限界取水量と最適の広域総取水量

したがって、広域内の各集落(各井戸で代表される小区分域)での需要量がその井戸の $\mathbb{P}_0$ 以上となる集落がある場合、この井戸をその需要量で取水すると上述のように広域総取水量が減少するので、むしろこの集落の井戸の低限界取水量を下げて広域総取水量を最大可能取水量にし、問題の集落の不足分を地上配分するのが水量の面からはよいであろう。

1) 水収支研究グループ編，「地下水資源学」　共立出版　S48.　P320～322
2) 石井吾郎著，「数理計画法入門」　サイエンス社