II-250　自由地下水の変動に及ぼす干渉効果の数値解析的検討

徳島大学工学部　正員　○尾島 勝
徳島大学大学院　学生員　足立一美

1. まえがき

本研究は，低平地自由地下水の挙動に及ぼす外水位変動条件の相違による影響を検討しようとするものである。したがって，浸透流は滞水層両端の変動条件のみによって生じるものとし，さらに滞水層厚さに比して水位変動量が小さく，浸透距離が長い準一次元の流れとして取り扱えるものとする。このような仮定に適合する砂層モデルを設定して実験を行い，砂層モデルの両端境界に与えた水位変動による砂層内の応答が，両端に与えられたものと同じ変動がそれぞれ別個に境界の一端に与えられた場合の応答の重ね合せとして表わし得るか否かを検討し干渉効果（$\Delta h/\eta_a$）という量を定義して，その時間的，場所的な相違を評価した。[1),2)] さらに，現象の非定常性と干渉効果の定量的評価を行うために，非定常浸透流の基礎式から解析的検討を試み，実験結果と比較考察した。

2. 数理モデルと計算法

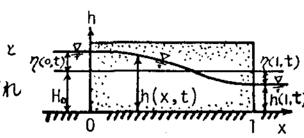

図-1　砂層モデル

いま，浸透領域としては図-1に示すような両端境界をもつ長方形の砂層モデルとし，初期水位が水平不透水層基盤上H_0にあるとき，両端境界での外水位がそれぞれ$h(0,t)=\psi_1(t)$，$h(l,t)=\psi_2(t)$と変化する場合を考える。

Darcy則と連続の式より，運動を表わす基礎式は次のように導びかれる。

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}=\frac{k(x,t)}{\lambda(t)}\left[h(x,t)\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{1}{\lambda(t)}\frac{\partial k(x,t)}{\partial x}h(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \qquad (1)$$

ここに，kは透水係数，λは有効間げき率であり，一般的にxあるいはtの関数と考えている。

式(1)が解析すべき現象の基礎式であるが，この式を上記のような境界条件のもとに直接的に解くことは極めて困難であり，できるだけ簡略化した数理モデルによって現象の性質を大略的に把握する方が賢明であろうと考えた。すなわち，まず第一に現象の生起場である砂層の物理的条件が理想的な均一等方性，飽和浸透であるとしてkおよびλを一定とすれば，式(1)の右辺第2項が無視されて次式の非線形方程式で表わされる。

$$\partial h/\partial t = K\left[h\,\partial^2 h/\partial x^2 + (\partial h/\partial x)^2\right] \qquad (K = k/\lambda = const.) \qquad (2)$$

さらに，水位変動量ηが初期水位H_0に比して十分小さい場合には，次式の線形方程式で表わされる。

$$\partial\eta/\partial t = C\,\partial^2\eta/\partial x^2 \qquad (C = kH_0/\lambda) \qquad (3)$$

したがって，式(3)によって生起現象を十分表現しうる場合には，両端水位変動による砂層内の水位応答は，個々の一端水位変動による水位応答の重ね合せとして得られる。すなわち，初期条件$\eta(x,0)=0$，境界条件$\eta(0,t)=\psi_1'(t)$，$\eta(l,t)=\psi_2'(t)$に対する式(3)の解は次式となる。

$$\eta(x,t)=\frac{2\pi C}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 C}{l^2}t}\int_0^t e^{\frac{n^2\pi^2 C}{l^2}\tau}\left\{\psi_1'(\tau)-(-1)^n\psi_2'(\tau)\right\}d\tau\,\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (4)$$

さて，式(3)の近似精度は，実際の水位応答と式(4)で求まる理論解との比較あるいは実際の水位応答と一端変動の実験より得られる水位応答の重ね合せによる仮想的な水位応答との比較によって知ることができる。そこで実験結果から考察すれば生起現象を式(3)で十分近似できるとする結論は得られず，式(2)あるいは式(1)にたちかえった詳細な検討が必要であることを指摘した。[1),2)]

したがって，次は式(2)に基づく検討に進まざるをえない。式(2)の解はCrank-Nicholsonの差分近似により求められる。すなわち($x=i$, $t=j+1$)における水位h_i^{j+1}は次式のようになる。

$$h_i^{j+1}=\frac{1}{2}\left(B_i+\sqrt{B_i^2+4C_i}\right) \qquad (5)$$

ここに，$B_i=\frac{1}{2}(h_{i+1}^{j+1}+h_{i-1}^{j+1})-\frac{\Delta x^2}{K\Delta t},\ C_i=D_i^j+\frac{1}{8}(h_{i+1}^{j+1}-h_{i-1}^{j+1})^2,\ D_i=\frac{\Delta x^2}{K\cdot\Delta t}h_i^j+\frac{1}{2}h_i^j(h_{i+1}^j-2h_i^j+h_{i-1}^j)+\frac{1}{8}(h_{i+1}^j-h_{i-1}^j)^2$ （6）

である。式（5）に初期条件，境界条件を与えることにより順次水位を算出できる。ここでは$\Delta t=30$秒，$\Delta x=5cm$とした。なお，砂層モデルにおいて$l=300cm$，$H_0=4.0cm$，ηの最大振幅は5～10 cm としている。

3. 解析結果の考察

1）干渉効果の評価　個々の一端水位変動による砂層内の応答水位をそれぞれ加え合わせた仮想水位から両端水位変動によって生じる応答水位を差し引いた量をΔhとし，これを大きい方の外水位変動の振幅η_aで除した無次元量$\Delta h/\eta_a$を干渉効果と定義し，その変化特性から現象の時間的，場所的な相違を評価しようとするものである。すなわち，$\Delta h/\eta_a$の値が(x,t)のいかんにかかわらず零に近いほど干渉効果は小さく，同時に式（3）の適用性が良いと評価できる。

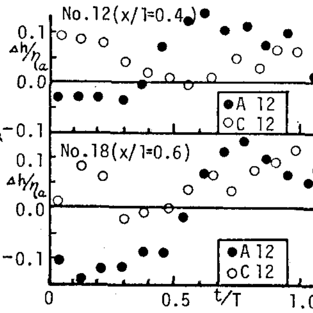

図-2　干渉効果の評価図

たとえば図-2に示した実験結果より明らかなように，干渉効果は時間的にも場所的にも変化するものであり，浸透過程から変動が始まるA12の方が排水過程から始まるC12よりも総体的にみて干渉効果が大きく，さらに両タイプとも式（3）による重ね合せの適用性は認められず，相対誤差は最大15%にも及んでいることがわかる。

2）非線形性の評価　式（2）で現象を表現しようとするときの非線形性の評価であるから，式（5）を解いて得られる応答水位から式（3）に基づく線形重ね合せによる仮想水位を差し引いた量を$\Delta h'$として，先と同様に$\Delta h'/\eta_a$として評価する。

図-3に結果の一例を示した。ここに示したA'13は模式的に描いたように変動が浸透過程から始まり両端の与条件が異なるものであり，図の(a)，(b)，(c)，(d)はそれぞれ測点6，12，18，24における特性を表わしたものである。測点番号（0～30）は砂層下流端から10cmごとに付したものであり，したがって測点24と6，18と12はそれぞれ砂層上下流端から等距離にある。またこの場合は上流端に振幅10cmの大きい外水位変動を与えている。図中の●印が非線形性による$\Delta h'/\eta_a$であり，同時に印されたものが対応する実験結果から得られた$\Delta h/\eta_a$の値である。

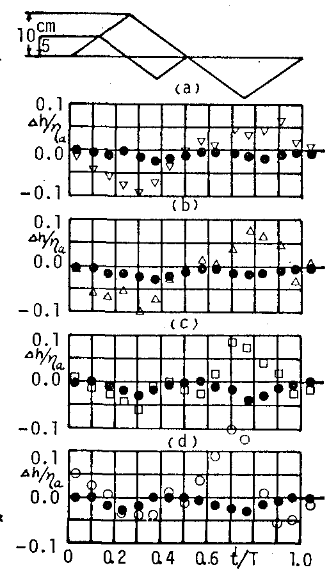

図-3　干渉効果に及ぼす非線形項の大きさ

この図からもわかるように●印で示された非線形性による干渉効果は，場所的に少し位相がずれる程度でほぼ同じような型で現われている。また，その値が常に負または零であることは，式（2）から得られる水位が非線形性を無視した式（3）から得られる水位よりも低いことを示すものである。しかし非線形性の考慮の有無による影響度は全体的にみれば非常に小さいと判断され，図にみられるような干渉効果の説明には，式（2）を用いても本質的な解決にはほとんど寄与しないといえよう。さらに，砂層内に生起する水位変動（η/η_a）を式（2）で表わすべくKの値を種々選んで試算を行った。しかし結果的には，水位の極値と位相を同時に実験結果と一致させうるKの値はとりえず，Kを一定とした式（2）の適応性もかなり狭くなるといえよう。

4. あとがき

以上のような検討結果より，干渉効果をさらに明解に説明するためにはkあるいはλの変化をも考慮した式（1）にたちかえった検討が基本的に必要であると結論できる。すなわち，非定常浸透現象の把握をさらに一歩発展させるためには，どうしてもk，λの変化特性の解明とその関数表示が必要であると考える。

参考文献：1）尾島・足立・広井；自由地下水の変動に及ぼす干渉効果に関する実験的考察，第28回土木学会中四国支部年講Ⅱ-10 1976.5

2）尾島・足立　；自由地下水の変動に及ぼす干渉効果に関する実験（Ⅱ），第29回土木学会中四国支部年講Ⅱ-31，1977.5