

中央大学理工学部 正会員 林 泰造
中央大学大学院 学生員 尾崎 幸男

はじめに

本報は、直線水路の移動床河床面に発生する河床波とそれに伴う二次流の關係について、河床安定理論の立場から理論解析的研究を行ったものである。解析モデルには滑動粘性係数を const. とおいた三次元(向)水路乱流場の基礎方程式を用いた。将来、解析モデルの精度の向上と併わせて非線形理論への拡張を試みるつもりであるが、今回は紙面の都合上、簡便化したモデルでの線形理論解の一部分を以下に報告する。

2. 基礎方程式と流速分布

移動床底矩形断面水路を考え、流下主流方向に x 軸、これに直交して流れの横断方向に y 軸、そして鉛直方向に z 軸をとれば、滑動粘性係数 $\varepsilon = \text{const.}$ とした場合の水流についての基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{Du}{Dt} = gI - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon \nabla^2 u \quad \text{----(1)}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon \nabla^2 v \quad \text{----(2)}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon \nabla^2 w \quad \text{----(3)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{----(4)}$$

ここに、 $D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, I は河床勾配である。

流れについては、Einstein の掃流砂量公式(後出)と、河床面上における流れの連続式(5)式を用いる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial g_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial g_{sy}}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{at } z = \eta \quad \text{----(5)}$$

ここに、 η : 河床変動(擾乱), λ : 河床砂の空隙率,

g_{sx} , g_{sy} : x , y 方向の掃流砂量(容積単位)。

次に主流の流速分布は図-1 のような分布を与えるものとし、

$$0 \leq z \leq D \quad \frac{U_s - U(z)}{U_*} = \frac{U_s - U_b}{U_*} \left(1 - \frac{z}{D} \right)^2 \quad \text{----(6)}$$

$$-\delta \leq z \leq 0 \quad \frac{U(z)}{U_*} = \frac{U_b}{U_*} \frac{z + \delta}{\delta} \quad \text{----(7)}$$

と仮定する。但し、 $\delta \sim 2d \sim O(d)$ で、 d は河床砂の粒径。

ここに、 $\varepsilon \equiv \alpha U_* D$, $(U_s - U_b)/U_* \equiv \beta$ ----(8) とおけば、 $\alpha = 1/(2\beta)$ または $\beta = 1/(2\alpha)$ ----(9)

の關係があり、いずれかが既値ならば、 $U_s = U_m + (1/3)\beta U_*$, $U_b = U_m - (2/3)\beta U_*$ ----(10)

が得られる。ここに、 $U_m = \int_0^1 U(z/D) d(z/D)$ である。Engelund(1969)は $\alpha = 0.077$ ($\beta = 6.5$) を提案しているが、本研究では Hama(1954)の Defect Law に従って $\beta = 6$ ($\alpha = 0.052$) を用いる。

ところで、境界条件を上げると以下のようになる。

水表面($z = D + \xi$, ξ は水面変動)においては、 $\phi = D\phi/Dt = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $w = D\xi/Dt$ である。
河床面($z = \eta$)では、 $w = D\eta/Dt$, 側壁($y = 0, B$)において、 $v = 0$ である。

さて、流砂量公式に何を代入するかについて問題は残されているが、ここでは一まず Einstein の掃流砂量公式を用いる。 $\bar{Q}_s = f(\eta) \cong 40 \tau_*^3$ at $z = \eta$ ----(11) 但し、 $\tau_* \gg \tau_{*c}$ 。また、 $g_{sy} = (v/u)_{z=\eta} g_{sx}$ ----(12)

ここに、 $f(\eta)$: Einstein の掃流砂量関数, $\tau_* = (\tau_{xz})_{z=\eta} / (\rho g(1-d))$: 無次元掃流力, τ_{*c} : 限界掃流力。

3. 無次元線形方程式

水流は準定常で河床の変形の非定常と考え、 $u = U(z) + u'$, $v = v'$, $w = w'$, $p = P(z) + p'$, $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ ----(13)

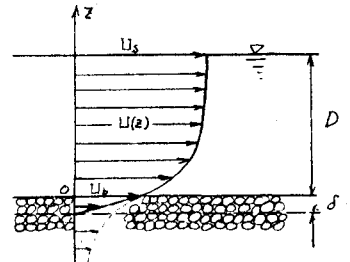


図-1. 流速分布

と置き、基礎方程式と境界条件を微分擾乱に対して線型化する。境界条件については Taylor 展開を利用し $z=0$ と $z=1$ の条件に引き直す。その後に、 $u/U_m \rightarrow u'$, $\dots$, $x/D \rightarrow x$, $\delta/D \rightarrow \delta$, $\dots$, $tU_m/D \rightarrow t$, $\dots$, $P/(PgD) \rightarrow P$, $\dots$, $\varepsilon/U_m D = 1/(2\beta)$ のように無次元化を行う。こうして得られた無次元線型方程式と境界条件は式(15)の形式に与えらる擾乱 η' とこれに励起される他の擾乱(二次波成分)を代入する(15), (16)式を得る。

$$\eta' = \frac{1}{2} \eta_0 \{ \cos ly e^{ik(x-ct)} + \text{Conjugate} \}, u' = \frac{1}{2} \{ \hat{u} \cos ly e^{ik(x-ct)} + \text{Conjugate} \}, v' = \frac{1}{2} \{ \hat{v} \sin ly e^{ik(x-ct)} + \text{Conjugate} \},$$

$$w' = \frac{1}{2} \{ \hat{w} \cos ly e^{ik(x-ct)} + \text{Conjugate} \}, p' = \frac{1}{2} \{ \hat{p} \cos ly e^{ik(x-ct)} + \text{Conjugate} \}, \xi' = \frac{1}{2} \xi_0 \{ \cos ly e^{ik(x-ct)+i\varphi} + \text{Conjugate} \} \dots (14)$$

ここで、 $\eta_0 = \|\eta'\|$, $\xi_0 = \|\xi'\|$ at $t=0$, ノルム $\|\cdot\|$ は $\text{Max.}|f'|$ の意味、 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$ は z の関数の Complex function, $k = 2\pi D/L$, $l = m\pi D/B$; x, y 方向の無次元波数、今回は $m=1$ とする, $c = c_r + i c_i$: 無次元複素位相速度, φ : 水面変動と河床擾乱に対して $z=0$ の位相差, 他の成分の $z=1$ の位相差は Complex function に含まれている。

$$ikF^2 U \hat{u} + F^2 \frac{d\hat{u}}{dz} \hat{w} = -ik\hat{p} + \frac{1}{2\beta} \frac{U_m}{U_m} F^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right) \hat{u}, \quad ikF^2 U \hat{v} = l\hat{p} + \frac{1}{2\beta} \frac{U_m}{U_m} F^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right) \hat{v},$$

$$ikF^2 U \hat{w} = -\frac{d\hat{p}}{dz} + \frac{1}{2\beta} \frac{U_m}{U_m} F^2 \left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 \right) \hat{w}, \quad -ik\hat{u} + l\hat{v} + \frac{d\hat{w}}{dz} = 0 \quad \dots (15)$$

$$-ikc\eta_0 + A_s \left[\frac{3}{2\beta} \frac{U_m}{U_m} \{ ik \frac{d\hat{u}}{dz} - k^2 \hat{w} \} - 3ik\eta_0 + \frac{l}{U_b} \hat{v} \right] = 0 \quad \text{at } z=0 \quad \dots (16)$$

ここで、 $F = U_m/\sqrt{gD}$, $\gamma = \sqrt{k^2 + l^2}$, $A_s = 40 \eta_0 \frac{(5-1)W_t}{(-1-\lambda)S} \left(\frac{d}{D} \right)^{3/2} \frac{1}{F}$ 。

境界条件: $\hat{p} = \xi_0 e^{i\varphi}$, $ikU_b \hat{p} = \hat{w}$, $\frac{d\hat{u}}{dz} + ik\hat{w} = 2(U_s - U_b)\xi_0 e^{i\varphi}$,
 $\frac{d\hat{v}}{dz} - l\hat{w} = 0$, $\hat{w} = ikU_b \xi_0 e^{i\varphi} \dots \text{at } z=1$
 $\hat{u} = ikU_b \eta_0 \dots \text{at } z=0$

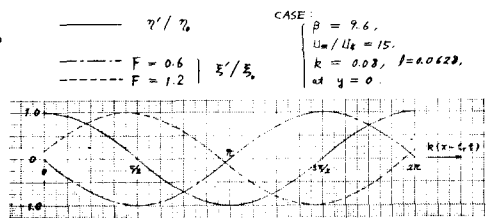


図-2 河床擾乱と水面変動 ($\eta_0 = \|\eta'\|$, $\xi_0 = \|\xi'\|$)

(15)式から(17)式を導き、展開の parameter $\varepsilon = \sqrt{2\beta(U_m/U_b)k}$ ($\varepsilon \gg 1$) とし、WKB法で解を求めると(18)式となる。

$$\mathcal{L}(\hat{w}) = \hat{w}^{(4)} + \varepsilon^2 \{ \mathcal{P}(z, \sigma) \hat{w}'' + \mathcal{Q}(z, \sigma) \hat{w}' + \mathcal{R}(z, \sigma) \hat{w} \} = 0 \quad \dots (17)$$

$$\hat{w}(z) = A_1 U^{-\frac{\sigma}{2}} \exp\left(\frac{H_1}{\sqrt{2}} \int_0^z U^{1/2} dz\right) + A_2 U^{-\frac{\sigma}{2}} \exp\left(-\frac{H_1}{\sqrt{2}} \int_0^z U^{1/2} dz\right) \dots (18)$$

$$\text{この解の成立条件は } |\sigma| \gg \left| \frac{1}{4} U^{-3} \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 - U^{-2} \frac{d^2 U}{dz^2} + \gamma^2 U^{-1} \right|^{1/2} \dots (19)$$

右辺は最大で 1.0 程度であるから $\sigma \gg 1.0$ は十分に満足される。

ここで cross-wave component $\hat{\phi} = l\hat{u} + ik\hat{v} \dots (20)$ を導入し、

$\hat{\phi}(z)$ についての微分方程式を境界条件の許にそくく、 $\hat{\phi}(z)$ は

(21)式で表わされ、他の擾乱成分は全て決まり(22)式となる。

$$\hat{\phi}(z) = -\frac{l}{ik} \frac{d}{dz} (l\eta U) \hat{w} \quad \mathcal{L}(Y) = -\frac{l}{k} \frac{d}{dz} (l\eta U) \hat{w} \quad \mathcal{L}(Z) \dots (21)$$

$$\hat{u}(z) = -\frac{l^2}{k\gamma^2} \frac{d}{dz} (l\eta U) \hat{w} \quad \mathcal{L}(Z) + i \frac{l}{\gamma^2} \frac{d\hat{w}}{dz}$$

$$\hat{v}(z) = i \frac{l}{\gamma^2} \frac{d}{dz} (l\eta U) \hat{w} \quad \mathcal{L}(Z) - \frac{l}{\gamma^2} \frac{d\hat{w}}{dz}$$

$$\hat{p}(z) = i \frac{kF^2}{\gamma^2} \frac{dU}{dz} \hat{w} + \frac{kF^2}{\gamma^2} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} - (i\sigma U + \gamma^2) \right\} \frac{d\hat{w}}{dz}$$

$$\dots (22)$$

ここで、 $\mathcal{L}(Y)$: Lommel function, $Y = i\sigma^{3/2} \left(\frac{3}{2} T \right)^{2/3} = iZ$,

$T = \int_0^z U^{1/2} dz$, Lommel function は Airy function で表わされる。

4. おわりに

境界条件から A_1, A_2 を決まり、(18), (22)式を(16)式に代入することによって固有値 c が求まる。こうして求められた定常限界曲線の一例を図-4に示した。

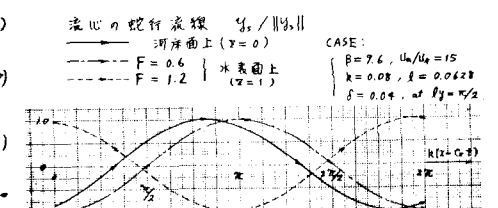


図-3 流心の蛇行波線

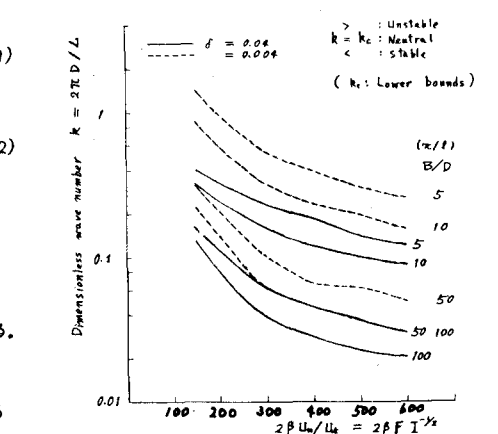


図-4 漸近理論による定常河床河床の安定限界曲線