II-199　管内振動流における壁面剪断応力の測定

東京都立大学工学部　正員　○安　川　　浩
　　〃　　　　　　　正員　宇　井　正　和

1．緒言　　一様管路内の層流時管内振動流については，速度，剪断応力の分布，自由振動時の減衰特性等について或る程度明らかにされてはいるが，速度，剪断応力等を直接測定した例は少ない。限界レイノルズ数を超えた振動流に対し，最近沢本，日野[1]が熱線流速計による速度分布の測定に基き，滑面乱流の壁面剪断応力に関する興味ある結果を報告しているが，壁面剪断応力に対するより確実な測定方法が確立されるならば滑面乱流のみならず，粗面乱流攻略の糸口も開けてこようかと思われる。

筆者等は一様管路部における軸対称振動流に対する運動方程式の断面内積分形が　1）2断面間差圧水頭 ΔH，2）壁面剪断応力 τ_0，3）断面平均変位 ξ … の3者により関係づけられることに着目し，差圧計と水位計の電気的出力を演算増幅器により演算させることにより，壁面剪断応力 τ_0 を算定することを試みた。以下にその概要を述べる。

2．運動方程式

曲線座標 $\xi_i\ (i=1\sim3)$，base vector $\boldsymbol{i}_i$，dyadics $(\boldsymbol{i}_i:\boldsymbol{i}_j)$，応力テンソル成分を σ_{ij} とすれば運動方程式は次式で表わされる。

$$\rho\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\rho\boldsymbol{F}+\nabla\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{i}_i:\boldsymbol{i}_j)\}\cdots\cdots(2.1)$$

$\nabla\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{i}_i:\boldsymbol{i}_j)\}=\nabla\sigma_{ij}\cdot(\boldsymbol{i}_i:\boldsymbol{i}_j)+\sigma_{ij}\{\boldsymbol{i}_j(\nabla\boldsymbol{i}_i)+(\boldsymbol{i}_i\nabla)\boldsymbol{i}_j\}$ を考慮すれば次式に変形される。

$$\begin{aligned}\nabla\{\sigma_{ij}(\boldsymbol{i}_i:\boldsymbol{i}_j)\}=&\ \boldsymbol{i}_1\Big[\frac{1}{h_1}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial\xi_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial\xi_3}+\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big\{\sigma_{11}\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2h_3)+\sigma_{21}\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3h_1)+\sigma_{31}\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1h_2)\Big\}+\frac{\sigma_{12}}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_2}\\&+\frac{\sigma_{13}}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_3}-\frac{\sigma_{22}}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_1}-\frac{\sigma_{33}}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi_1}\Big]+\boldsymbol{i}_2\Big[\frac{1}{h_1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\xi_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial\xi_3}+\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big\{\sigma_{12}\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2h_3)+\sigma_{22}\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3h_1)+\sigma_{32}\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1h_2)\Big\}+\frac{\sigma_{23}}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_3}+\frac{\sigma_{21}}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_1}\\&-\frac{\sigma_{33}}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi_2}-\frac{\sigma_{11}}{h_2h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_2}\Big]+\boldsymbol{i}_3\Big[\frac{1}{h_1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\xi_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\xi_3}+\frac{1}{h_1h_2h_3}\Big\{\sigma_{13}\frac{\partial}{\partial\xi_1}(h_2h_3)+\sigma_{23}\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_3h_1)+\sigma_{33}\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1h_2)\Big\}+\frac{\sigma_{31}}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\xi_1}+\frac{\sigma_{32}}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\xi_2}-\frac{\sigma_{11}}{h_3h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\xi_3}-\frac{\sigma_{22}}{h_3h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\xi_3}\Big]\end{aligned}$$

円筒座標 r,θ,z を用い，軸対称性と軸方向の一様性を仮定すれば，軸方向の運動方程式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}=-g\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho g}+h\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\tau}{\rho}\right)\cdots\cdots(2.2)$$

動水勾配 $I=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho g}+h\right)$ は時間のみの関数とみなせるから断面内積分により次式が得られる。

$$\frac{\partial V}{\partial t}=gI+\frac{2}{r_0}\cdot\frac{\tau_0}{\rho}\cdots\quad\text{但し}\ V\text{は断面平均流速，}r_0\text{：管半径，}\tau_0\text{：壁面剪断応力}\cdots(2.3)$$

角速度 ω の周期運動では $\frac{\partial V}{\partial t}=i\omega V$，$V=i\omega\xi$（$\xi$ は断面平均変位），$\frac{\partial V}{\partial t}=-\omega^2\xi$ であるから差圧測定区間長 l を乗じ $\Delta H=-I\cdot l$ と置換すれば次式が得られる。

$$2\cdot\frac{l}{r_0}\cdot\frac{\tau_0}{\rho g}=\Delta H-\frac{\omega^2}{g}l\cdot\xi\cdots\cdots(2.4)$$

断面平均変位 ξ は管端の自由水面付近に設置される水位計の電気的出力から得られ，一方 ΔH は差圧計出力より求まるから，差圧と変位の各出力が同一のスケールとなるよう出力感度を調整すれば，式(2.4)の右辺は簡単な差動型演算増幅器により演算される。

3. 測定上の諸問題

3-1. 層流時剪断応力の大きさの程度

半径 r_0 の一様管路部における角速度 ω の軸対称振動流中での層流時剪断応力 τ_0 は断面平均変位 ξ との間に次の関係を有する[1]。ここに $J_n(x)$ は第一種ベッセル関数(オーダー n)。また $x_0 = r_0\sqrt{-i\omega/\nu}$ で ν は動粘性係数とする。

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = -\frac{1}{x_0}\cdot\frac{J_1(x_0)}{J_2(x_0)}\cdot\frac{r_0\omega^2}{g}\cdot\xi \quad \cdots\cdots (3.1)$$

上式の大きさの目安をつけるために管の直径 $2r_0 = 5\,\mathrm{cm}$、周期 $T \doteqdot 2.0\,\mathrm{sec}$、$\nu = 0.01\,\mathrm{cm^2/sec}$ 程度とすれば $|x_0| \doteqdot 44$。それ故ベッセル関数の漸近展開公式を用いれば式(3.1)は次式で表わされる。

$$2\cdot\frac{l}{r_0}\cdot\frac{\tau_0}{\rho g} \sim \frac{2}{\gamma}\cdot\frac{\omega^2 l}{g}\cdot\frac{P_1+iQ_1}{P_2+iQ_2}\cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}\cdot\xi \quad \cdots\cdots (3.2)$$

ここに $P_m(z) = 1 - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8z)^2} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!\,(8z)^4} - \cdots$

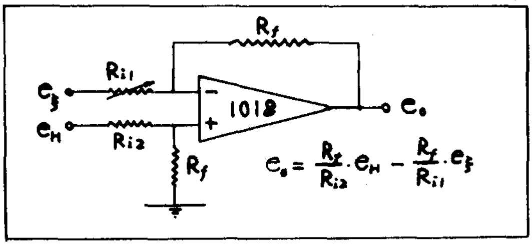
$Q_m(z) = \frac{4n^2-1^2}{1!\,8z} - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!\,(8z)^3} + \cdots$, また $\gamma = |x_0| = r_0\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$

それ故 $|P_m| \doteqdot 1$, $|Q_m| \ll 1$ を考慮すれば式(3.2)における平均変位 ξ の係数の大きさは $l = 1\,\mathrm{m}$ に対し $\frac{2}{\gamma}\cdot\frac{\omega^2 l}{g} = 0.0458$ となり、結局左辺の大きさは ξ の約4.6%となる。

3-2. 使用計器と特性

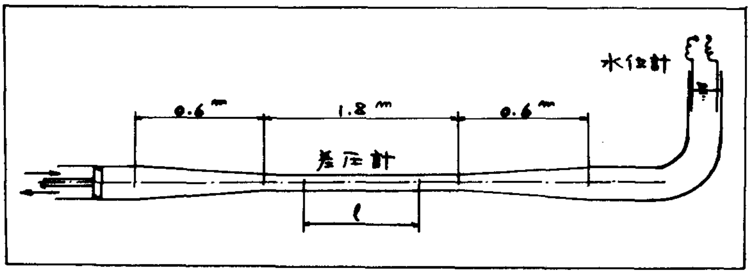
使用計器は共和電業製DPM-110A動歪計をベースに、差圧計は同社製PD-100GAを、また水位変換器は平行線プローブを使用し、国司[2]の方法により線型化した。DPM-110Aの増巾器は出力約5Vまではほぼ完全に直線性を有し、ゼロ点移動並びにドリフトは1mV程度で筆者等の用途は満足している。また水位計の直線性も1%を目標に製作したが、上昇時と下降時で感度がやや変化する点を除けばまずまずの特性と考える。

他方式(2.4)の右辺の演算を行なう演算増巾器にはフィルブリック・ネクサス(テレダイン)社製OPアンプ1018を用いた。$R_{i2} = R_{i1} = R_f = 50\,\mathrm{k\Omega}$ における出力端でのドリフトは1mV以下で充分使用に耐える。



3-3. その他の諸問題

上述の他に、一様管路部への助走距離、差圧計の取付けの精度等デリケートな問題がある。



(謝辞)本研究は昭和51年度文部省科研費(代表者 堀川清司教授)によるものであることを付記し、深く謝意を表します。

(参考文献)

1) 安川, 田川"管内往復振動流の減衰性に関する研究" 土木学会論文報告集. 208号. 1972. 12月
2) 国司秀明"電気抵抗式波高計の設計について" 京大防災研報告. Vol. 1, 3. 1959
3) 沢本. 日野"円管内振動流の壁面摩擦抵抗則" 土木学会論文報告集 258号. 1977年2月.