

公衆資源研究所 正員 北林 興二
東京工業大学 正員 日野 幹雄

1. まえがき： 密度成層流中で発生するよどみ流については、Yih (1958), Kao (1965a, 1965b), 大西と日野 (1967), 日野と大西 (1968, 1969) などの理論的研究がある。Yih (1958) は Channel 内の密度成層流体が Channel 端の一点で Sink に吸い込まれる場合に、フルード数がある値以下で渦領域が形成されることを示した。Kao (1965b) はこれをよどみ域として論じた。Kao (1965a) はまた、二次元密度成層流中の物体のまわりの流れを論じ、フルード数が小さい場合によどみ域が発生することを示した。Kao の方法では物体を Sink と Vortex で表わし、dividing Stream Line に沿ってベルヌーイ式が満たされるよう、それらの強さを定める。

大西と日野 (1967) は Kao の方法を発電所等の深層取水口の問題に適用し、軸対称密度流が軸中心の一点で吸い込まれる場合のよどみ流の発生を示した。日野と大西 (1968, 1969) はさらに、解をフルード数 Fr の -2 乗で展開する Perturbation 法による解法を示し、フルード数と流れの関係、よどみ流の発生条件を詳しく調べた。

ここでは、Channel flow 中の壁面に垂直に置かれた薄板のまわりの解を Perturbation 法により求め、よどみ流の発生と調べた結果について述べる。

2. Perturbation 法による解法.

fig 1 のような Channel flow を考える。流れは上流側の無限遠 ($x = -\infty$) で一様流速 U をもち、ここでは密度勾配も一定 ($1/H \partial \rho / \partial z = \beta$) とする。

2-1. 基礎式： 二次元化された座標および流函数を用いた密度成層、非粘性流の基礎式は Yih (1965) により次のように表わされる。

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial z^2 + Fr^{-2} \psi = -Fr^{-2} z \quad (1)$$

ここで、 ψ は流函数、 Fr はフルード数 ($U / (\sqrt{g\beta H^3})$) である。

ψ を ε ($= Fr^{-2}$) について展開し、 $\psi = -z + \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots$ で表わす。ただし、 $-z$ は (1) 式の特解である。この解を (1) 式に代入し、 ε のオーダー毎に整理することにより、 $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ の関係式を得る。

$$\partial^2 \psi_0 / \partial x^2 + \partial^2 \psi_0 / \partial z^2 = 0 \quad (2-1)$$

$$\partial^2 \psi_1 / \partial x^2 + \partial^2 \psi_1 / \partial z^2 = -\psi_0 \quad (2-2)$$

$$\partial^2 \psi_2 / \partial x^2 + \partial^2 \psi_2 / \partial z^2 = -\psi_1 \quad (2-3)$$

2-2. 解法.

① ψ_0 の解： ψ_0 の式は Potential 流の式であり、境界条件

$$\psi_0 = 0 \quad \text{at } x = -\infty, \infty \quad \text{at } z = 0, 1$$

$$\psi_0 = z \quad \text{for } x = 0, \quad 0 \leq z < b, \quad \psi_0 = g(z) \quad \text{for } x = 0, \quad b \leq z \leq 1$$

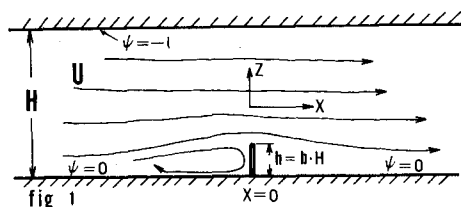
とおくことにより、 ψ_0 は $x \leq 0$ について、 $\psi_0 = \sum a_n e^{n\pi x} \sin n\pi z$ で表わされる。

ここで、函数 $g(z)$ は、 $g(b) = b$, $g(1) = 0$ で、さらに、 $W_{x=0} = (\partial \psi_0 / \partial x)_{x=0} = 0$ とはるよう決定する。

ここでは $g(z)$ として、

$$g(z) = z, \quad \text{for } 0 \leq z < b, \quad g(z) = b(1-z)^m / (1-b)^m \quad \text{for } b \leq z \leq 1, \quad (\text{ただし } m \text{ は整数})$$

と仮定すると、係数 a_n は次式により求められる。



$$a_n = 2 \int_0^1 g(\eta) \sin n\pi\eta d\eta = 2 \int_0^b \eta \sin n\pi\eta d\eta + \frac{2b}{(1-b)^m} \int_b^1 (1-\eta)^m \sin n\pi\eta d\eta \quad (3)$$

ここで、指数 m を $(\partial\psi_0/\partial x)_{x=0} = 0$ が満たされるよう決定する。

② 一次の解 ψ_1 : ψ_1 に関する基本式 (2-2) に $\psi_0 = \sum a_n \sin n\pi z$ と代入し、境界条件

$$\psi_1 = 0 \quad \text{at } x = -\infty, 0 \quad (4)$$

$$\psi_1 = 0 \quad \text{at } \eta = 0, 1$$

を考慮することにより、 ψ_1 の解として次式を得る。

$$\psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a_n}{2n\pi} x e^{n\pi x} \sin n\pi z \quad (x \leq 0) \quad (5)$$

③ 二次の解 ψ_2 :

一次の解と同様に (2-3) 式に (5) 式を代入し、 ψ_1 と同様の境界条件を適用することにより、 ψ_2 は

$$\psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-a_n}{8(n\pi)^3} x + \frac{a_n}{8(n\pi)^2} x^2 \right\} e^{n\pi x} \sin n\pi z \quad (6)$$

④ 上流側の解。

これに関する二次の項まで考慮した上流側の解は結局、次のように表わされる。 ($x \leq 0$)

$$\psi = -z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{n\pi x} \sin n\pi z \left\{ 1 - \frac{\varepsilon x}{2n\pi} - \frac{\varepsilon^2 x}{8(n\pi)^3} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{8(n\pi)^2} \right\} \quad (7)$$

3. 流れの様子。

(7) 式を用い、 $b=0.2$, $\varepsilon=2, 3.2$ ($Fr=0.71, 0.18$) に対して薄板上流側の流線の様子を示したものが fig 2-(a), 2-(b) である。図で明らかのように、 Fr が小さくなると、よどみ域(この場合は渦流域)の発生が見られる。よどみ域の発生限界フルード数は 0.3 前後であり、従来の理論解析結果とはほぼ一致する。

薄板下流側の解も、この解法を用いた場合には上流側と対称となり、(7) 式中の x を $(-x)$ で置きかえれば良い。しかしながら、実際の流れでは lee wave などがあり、上流側とは対称とならない。下流側の解および、風洞実験により観察したよどみ流については発表時にゆする。

参考文献。

- 1) Yih, C.S. (1958): Proc. 3rd U.S. National Congress, Appl. Mech.
- 2) Yih, C.S. (1965): Dynamics of Nonhomogeneous Fluid
- 3) Kao, T.W. (1965a): Jour. Geoph. Res. 70-4
- 4) " (1965b): Jour. Fluid Mech. 21-3
- 5) 大西外明, 日野幹雄 (1967): 第14回海岸工学講演会
- 6) 日野幹雄, 大西外明 (1968): 東京工業大学研究報告 No. 5
- 7) " (1969): 土木学会論文集 pp. 39~46

