II-176　温水取水についての数値解析

東洋大学工学部　学生員　○田中　修三
東洋大学工学部　正会員　萩原　国宏

1. まえがき

温水取水の模型実験を行なうと，温度躍層上を水平方向に流れる流れが卓越する事が確認される。このことより，流れ関数ψと密度ρの関係が密接であるとの仮定を用いて，日野.大西先生が行なったY.i.hの変換式による解析方法を使って，密度ρの分布を直線で与えない時の，数値解を求めたものである。

2. 軸対称密度流の基礎方程式

軸対称，成層流体の定常流れで，粘性，圧縮性を無視したNavier-Stokesの方程式と連続の方程式（non-diffusion）にY.i.hの変換を行ない

$$(u', w') = \sqrt{\rho/\rho_0}\,(u, w) \qquad (1) \qquad \rho_0\text{ ; reference density}$$

Pseudo-Stream function $\bar{\Psi}$ を導入すると

$$u' = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial z}, \qquad w' = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial r} \qquad (2)$$

密度成層流体の定常軸対称流れの基礎方程式として次式が得られる。

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial r}\right)+\frac{gz}{\rho_0}\cdot\frac{d\rho}{d\bar{\Psi}}=\frac{1}{\rho_0}\frac{dH(\bar{\Psi})}{d\bar{\Psi}} \qquad (3)$$

$$H(\bar{\Psi}) = p + \frac{1}{2}\rho_0(u'^2 + w'^2) + \rho g z \qquad (4)$$

式(3)における$d\rho/d\bar{\Psi}$は水の密度変化，$dH/d\bar{\Psi}$はSpecific energyの変化が流れに与える効果をあらわす項である。

(i). 流線と密度は密接であり，線形関係にあるとすると，

$$\rho = (\rho_0 - \rho_1)\psi + \rho_1 \qquad (5)$$

$$\psi = \bar{\Psi}/\bar{\Psi}_0 \qquad (6)$$

(ii). 取水口より十分上流では流れは水平方向に一様に流れるものとすると

$$H(\bar{\Psi}) = -\int \rho g\,dz + \rho g z \qquad (7)$$

以上2つの仮定によって、無次元化を行なうために次の変換を行なう。

$$\psi = \bar{\Psi}/\bar{\Psi}_0, \quad \bar{\Psi}_0 = \beta\sqrt{g d^5}$$

$$\xi = r/d,\quad \eta = z/d,\quad \varepsilon = (\rho_0 - \rho_1)/\rho_0$$

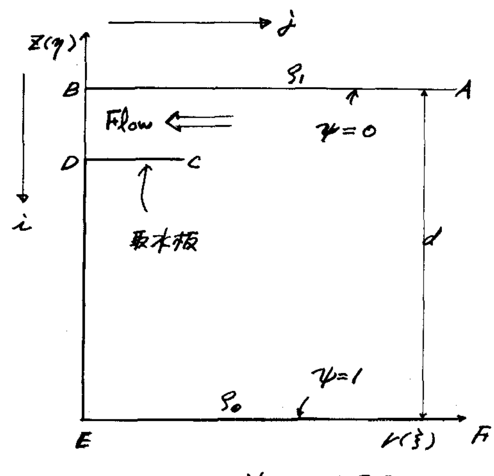


Fig 1　流れの座標系

結局，密度ρを直線で与えない場合，式(8)を解けば良い。

$$\frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\beta^2}\cdot\varepsilon\cdot\eta=\frac{1}{\beta^2}\cdot\varepsilon\cdot\frac{dH(\psi)}{d\psi} \qquad (8)$$

$$H(\psi) = -\int\psi\cdot d\eta + \psi\cdot\eta \qquad (9)$$

3. 数値解析

式(8).(9)を差分表示すると、

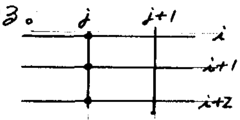
$$H_{i,j} = -\sum_{i=1}^{i}\psi_{i,j}\cdot\Delta\eta + \psi_{i,j}\cdot\eta \qquad (10)$$

$$\frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta\xi^2}+\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}+\psi_{i-1,j}}{\Delta\eta^2}-\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j}}{\Delta\xi}\right)+\frac{1}{\beta^2}\cdot\varepsilon\cdot\eta = \frac{1}{\beta^2}\cdot\varepsilon\left(\frac{4H_{i+1,j}-H_{i+2,j}-3H_{i,j}}{4\psi_{i+1,j}-\psi_{i+2,j}-3\psi_{i,j}}\right) \qquad (11)$$

式(11)の右辺の差分表示は，放物線近似で置きかえたものである。

$$H=a'\eta^2+b'\eta+c' \qquad (12)$$
$$\psi=a\eta^2+b\eta+c$$

式(12)より$a', b', c', a, b, c,$を決める。



$$\frac{dH}{d\psi_{(\eta=0)}}=\frac{dH}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\psi}=b'\times\frac{1}{b}$$
$$=\frac{4H_{i+1,j}-H_{i+2,j}-3H_{i,j}}{4\psi_{i+1,j}-\psi_{i+2,j}-3\psi_{i,j}}$$

以上の如く差分表示した式(11)より数値解を求める。

(i) 境界はFig 1で示した通りである。

$\rho_1, \psi=0$ on AB

$\rho_0, \psi=1$ on CDEF

(ii) 格子は正方形で

$\Delta\xi=0.05,\ \Delta\eta=0.05$

$i=21,\ j=41$

(iii) 初期値として全点(21×41)の$\psi_{i,j}$を与え、式(10)によって全点の$H_{i,j}$を計算する。式(11)によってψの残差が1/500になるまで繰り返し計算する。計算には，S.O.R法を使用した。

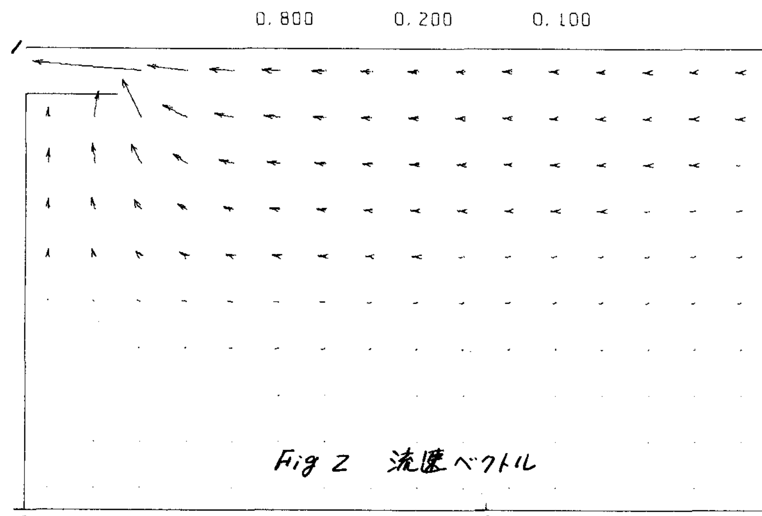


Fig 2　流速ベクトル

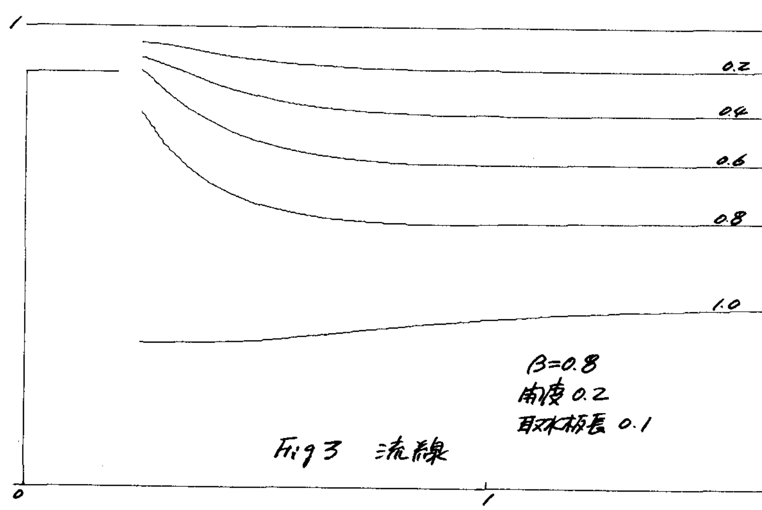


Fig 3　流線

4. あとがき

Fig 2，Fig 3 は$\beta=0.2\sim1.2$まで変化させた時の，流速ベクトル，流線を描いたものの一部である。βが大きくなるにつれ，流速ベクトルは大きくなり，流動層は薄くなってゆくようである。今後の課題として，今回求めた$u, w,$の定常解を利用して，拡散方程式を解き，貯水池の濁水問題へ発展させてゆきたい。

5. 参考文献

日野幹雄・大西外明：成層密度流におよぼすPoint sinkの高さの効果
土木学会論文報告集，第163号 pp.39～48，1969.

日野幹雄・大西外明：深層取水の流れへの考察 (1)，(2)．
第14.15回 海岸工学講演会講演集 1967，1968．