

日本テトラボッド 正会員 水村和正
東京工業大学 正会員 福岡健二

まえがき 周囲の流体よりも密度の大きい濁水が静水中に進入する時、濁水は密度流を形成する。密度流は非定常性が強い先端部、先端部から十分に離れた定常部、両者の間の遷移部の3つの部分からなる。本研究では、二次元ナビエ・ストークス方程式より、密度流が層流と乱流の場合について遷移部の流速分布を理論的に導き、実験結果により説明を与えた。

(1) 層流型濁水密度流の流速分布

座標系を図-1のように選ぶ。定常・層流で密度分布がある時のナビエ・ストークスの式はブーシネスク近似と境界層近似によって次式となる。

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\Delta p}{\rho_1} g \sin \theta &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\Delta p}{\rho_2} g \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

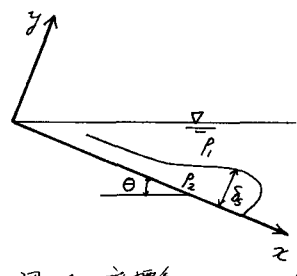


図-1 座標系

ここに、 $u = x$ 方向の流速、 $v = y$ 方向の流速、 $\rho_1 =$ 上層流体の密度、 $\Delta p =$ 下層と上層流体の密度差、 $g =$ 重力加速度、 $\theta =$ 底面が水平となす角度、 $\nu =$ 動粘性係数、 $p =$ 圧力である。流れ関数 ψ を導入する。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

式(1)から圧力項を消去すると、次のようになる。

$$\psi_y \psi_{yy} - \psi_x \psi_{xy} - \frac{g}{\rho_1} \Delta p_x \cos \theta - \frac{g}{\rho_1} \Delta p_y \sin \theta = \nu \psi_{xyy} \quad (3)$$

x 方向に関して現象が相似と²⁾考えられることから、 x に関する相似解を求める。³⁾ その時、新しい変数(Similarity Variable)は次のようになる。

$$\eta_* = \frac{y}{x}, \quad \psi_* = \psi, \quad \Delta p_* = x^3 \Delta p \quad (4)$$

式(4)を(3)に代入し整理すると

$$\nu \psi_*'' + 2 \psi_* \psi_*'' + f(\eta_*) = 0 \quad (5)$$

$$\text{ここで} \quad f(\eta_*) = -\frac{g \cos \theta}{\rho_1} (\eta_* \Delta p_{\eta_*} + 3 \Delta p_*) + \frac{g \sin \theta}{\rho_1} (\Delta p_{\eta_*} + \frac{3 \Delta p_*}{\eta_*})$$

式(5)で、 $\phi_1 = \psi_*$, $\phi_2 = \eta_*$, $\phi_3 = \eta_*$ とおくと、式(5)は次式のようなベクトル型の一階微分方程式になる。

$$\frac{d\phi}{d\eta_*} = F(\phi, \eta_*) \quad (6) \quad \text{ここで、} \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T, \quad F = (\phi_2, \phi_3, -\frac{2\phi_1\phi_2 + f(\eta_*)}{\nu})^T$$

式(6)は次の境界条件のもとで数値的に解く。

$$\text{水底: } \eta_* = 0 \text{ で } \phi_1 = 0; \quad \text{水面: } \eta_* = \tan \theta \text{ で } \phi_1 = \phi_2 = 0 \quad (7)$$

これは2点境界値問題であり、水面で適当な ϕ_3 を仮定し、水底まで式(6)を数値積分し、 $\phi_1 \approx 0$ がどうか検討し、水底で ϕ_1 が十分零に近くなるまで計算を繰り返す。数値計算より求めた流速分布を図-2に無次元化して示す。

密度流が層流の場合に実測された Ippen⁴⁾らの流速分布による説明を与える。解析に用いた密度分布は、定常部で十分近似する指数関数 $\Delta P_x = b_1 e^{-b_2 y}$ を仮定し、その係数には実測値を用いた。すなわち、 $b_2 = 3.13$ で b_1 は最大密度である。

(2) 乱流型濁水密度流の流速分布

次に濁水層が乱流である場合を考える。この時、流動を自由噴流と類似と考へて、渦動粘性係数を導入する。すなわち

$$\epsilon = k \delta_s u_{max} = k_1 x u_{max} \quad (8)$$

式(8)では濁水層厚 δ_s が流下距離 x に比例するという実験結果を用いた。式(3)の y のかわりに ϵ を代入し、 x に関して相似解を仮定すると、新しい変数は次のようになる。

$$\eta = \frac{y}{x}, \quad \psi = \frac{\psi}{x}, \quad \Delta P_x = x \Delta P \quad (9)$$

式(9)を ϵ を使って得られた支配方程式に代入して整理すると、

$$-\frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{g \cos \theta}{\rho_1} (\Delta P_x + \eta \Delta P_{\eta}) - \frac{g \sin \theta}{\rho_1} \Delta P_{\eta} = k_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \quad (10)$$

となる。次に、 $\Delta P_x = b_1 e^{-b_2 \eta}$, $\psi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \eta^j$ と仮定し、式(7)の条件のもとで a_j を逐次求めると、(11)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= a_1 = 0 \\ a_2 &= \frac{-12k_1 + [144k_1^2 + 8 \tan^2 \theta \{24k_1 a_4 \tan^2 \theta - \tan^2 \theta (2b_1 b_2 g \cos \theta + b_1 b_2^2 g \sin \theta) / 2\rho_1\}]^{1/2}}{4 \tan^2 \theta} \\ a_3 &= -\frac{a_2 + 6a_4 \tan^2 \theta + 10a_5 \tan^2 \theta}{3 \tan \theta}, \quad a_4 = \frac{1}{24k_1} \left(\frac{g \cos \theta}{\rho_1} b_1 + \frac{g \sin \theta}{\rho_1} b_1 b_2 \right) \\ a_5 &= -\left(2a_2^2 + g \cos \theta \cdot b_1 b_2 / \rho_1 + g \sin \theta \cdot b_1 b_2^2 / 2\rho_1 \right) / 60k_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

従って、 $\psi = a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + a_4 \eta^4 + a_5 \eta^5$ (12) となる。数値計算から求めた流速分布を図-3に示す。密度分布としては、乱流で測定された茅田⁵⁾ら、Tesaker⁶⁾の結果から b_1 , b_2 を決めた。図-3から次のことが言える。壁からやや離れた断面最大流速が現われる位置より上方では、濁水密度流を自由噴流と類似の現象と考へ、渦動粘性係数を導入して導いた流速分布は、茅田および Tesaker の実測値を比較よく説明している。しかし、壁の付近では粘性が強く影響するため(12)式では不十分で、むしろ層流型の流速分布の方が適合する。層流、乱流ともに種々の密度分布曲線について計算を行ない検討したが、流速分布を図-2、図-3のように無次元化すると濃度分布形はほとんど影響を及ぼさない。これは、実験室で扱う密度流の範囲では、対象となる密度の大きさにそれほど差がないためと考えられる。

1) 福岡ら, 第21回水論, 1977, 2) Plappら, J. of Geoph. Res. 1960
3) Ames, Academic Press, 1965 4) Ippenら, NBS. Rep. 1952
5) 茅田ら, 土木学会論報集, 1975 6) Tesaker, Proc. 13th. IAHR, 1969

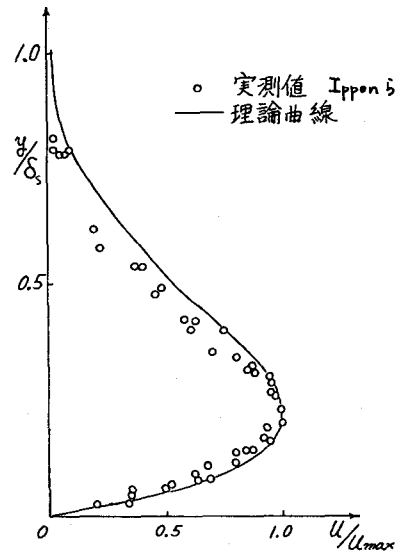


図-2 層流密度流の流速分布

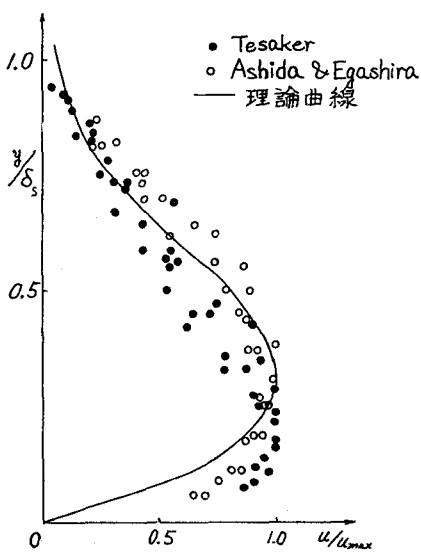


図-3 乱流密度流の流速分布