

アイ・エヌ・エー新土木研究所 正員○柴田正和
東京理科大学理工学部 正員 大西外明

原子力乃至火力発電所のカーテンウォール式冷却水取水設備（図1）の限界取水量についていくつかの理論的及び実験的研究がなされている⁽¹⁾。そこでは、取水に伴う境界面の低下をBernoulliの定理から求めているが、深層取水設備の効能を論ずるに際しては、境界面の低下の評価と同時に境界面の安定性について吟味することが不可欠である。ところでカーテンウォール直上流における境界面は水平面に対して大きな勾配を有していることが特徴的である。然るに既往の密度流境界面の安定性についての研究は、著者らの知る限り水平境界面に対するもののみである⁽²⁾。我々は傾斜境界面をもつ密度流の安定性についての理論的アプローチを試みた。後述するようにこの現象には密度流を特徴づける多くの物性定数又は無次元量が関与するので、初めから図1に示すような一般的な境界面形状について議論するのは困難である。そこで個々の物理量のこの現象への寄与のしかたを理解し易くするために、且つ数学的取扱いの簡便化を図るべく、境界面は水平方向に対して θ の勾配を有する平面とし、非粘性流体（case1）と粘性流体（case2）の二つについて解析を行った。いずれの場合にも上層流体は静止しているとした。

case1 は非粘性非圧縮性流体で steady state の流速の x 成分 U が z に依存しない解を求めると以下のようになる。（図2）

$$U(x) = U(0) [1 + 2Ax/U(0)^2]^{1/2} \quad (1)$$

$$W(x, z) = -Az/U(x) \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\rho_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \right] p + g \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 2A^2z/U(x)^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここに W は流速の z 成分、 $A = (A\rho/\rho_2)g \sin \theta$ (4), $A\rho = \rho_2 - \rho_1$, (5)である。このsteady stateに無限少の攪乱を与え、この攪乱について線形化したNavier-Stokesの方程式を解く。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial U}{\partial x} + w \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \frac{\delta \rho}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial z} + \frac{\delta \rho}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{T}{\rho^2} \nabla^2 \delta z(x, y) \delta(z) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \delta z}{\partial t} + U \frac{\partial \delta z}{\partial x} = w \quad (z=0) \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

ここに u, v, w は攪乱流速の x, y, z 成分、 $\delta \rho, \delta p, \delta z(x, y)$ は密度、圧力、境界面の z 座標の攪乱、 T は表面張力係数である。以上の連立方程式を x 方向の波数 k (> 0)、振動数 ω のmodeにFourier変換する。 y 方向の波数は簡単のため0とし、 z 方向は空間座標に留めておく。 $U(x)$ 及び $U'(x)$ を級数展開し、leading termのみを残す、又解いた結果で $z \rightarrow 0$ の極限をとるが、数学的繁雑さを除くためあらかじめ $z=0$ とおいた式を解くことにする。（この操作は長波長の攪乱を論ずる場合に問題にすべき点である。）これらを連立させると以下の w についての方程式を得る。

$$\rho(-i\omega + ikU)w + [Tk^2 \delta(z) - g \cos \theta \cdot D\rho] \left(\frac{-i\omega + ikU}{-i\omega + ikU} \right) = \frac{1}{k^2} D \left[\rho(-i\omega + ikU + \frac{\partial U}{\partial x}) D w \right] + \frac{1}{ik} D(\rho \cdot DU \cdot w) + g \frac{\sin \theta}{ik} D(D\rho \cdot \frac{-i\omega + ikU}{-i\omega + ikU}) \quad (12)$$

(12式を境界面 $z=0$ を含む微小区間について z で積分すると次の境界条件を得る。（ $D \equiv \partial/\partial z$ ）

$$(Tk^2 + A\rho \cdot g \cos \theta) \left(\frac{-i\omega + ikU}{-i\omega + ikU} \right)_{z=0} = \frac{-i}{k^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\rho(\omega - kU + i \frac{\partial U}{\partial x}) D w]_{\epsilon} \quad (13)$$

境界以外では(12式は次のようになる。

$$(D^2 - k^2 + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{D^2}{-i\omega + i k U}) w = 0 \quad (14)$$

この方程式の上層での解は $w = -\omega A \exp(-kz)$, (15)

下層では、 $|\omega - kU| \gg |\frac{\partial U}{\partial x}|$ (16) の条件の下に、

$$w = (-\omega + kU) A \exp\{kz / (1 + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{1}{-i\omega + i k U})^{1/2}\} \quad (17)$$

ただし、複素数の根号は実部が正符号をとるものと約束する。これらの解(15), (17)を境界条件(13)に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} (Tk^2 + 4\rho \cdot g \cos \theta) k &= \rho_1 \omega^2 \\ + \rho_2 [(\omega - kU)^2 + \frac{1}{2}(\omega - kU) \frac{\partial U}{\partial x}] \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式の解 ω の虚部を、(16)の条件の下に評価すると、 $\text{Im} \omega > 0$ の根が1つあることが分る。ゆえに case 1 の steady state は不安定であることが結論される。

case 2 は粘性非圧縮性流体で、1において x 方向の加速を生ぜしめた分力を粘性力が完全に cancel している場合を考える。(図3) これから $U''(z) = -A/\nu = -\Gamma$ (19)

case 1 と全く同じ数学的手法を用いて次の境界条件を得る。(簡単のために $T=0$ とする)

$$\begin{aligned} 4\rho \cdot g \cos \theta \left(\frac{w}{-i\omega + i k U} \right) z=0 \\ = -\frac{1}{k^2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\rho(\omega - kU - i\nu(D^2 - k^2)) Dw + k\rho \cdot DU \cdot w]_{\epsilon}^{\infty} \end{aligned} \quad (20)$$

上層についての解は case 1 と同じであり、下層については次式を得る。

$$[\nu k^2 (\frac{D^2}{k^2} - 1)^2 + i(\omega - kU)(\frac{D^2}{k^2} - 1) - i\frac{\Gamma}{k}] w = 0 \quad (21)$$

粘性を考慮したために方程式が四次になっている。これを正面から解くことは式を複雑にするばかりで、これから解析的に意味のある情報を引き出すのは殆ど不可能である。そこで(21)式において、 $\frac{D^2}{k^2} - 1 \sim 0 (k^0)$ (22) という仮定を置き、(21)式を長短両波長域 ($k^3 \gtrless \Gamma/\nu$) に分けて考察する。先ず短波長域 ($k^3 \gg \Gamma/\nu$) では(21)式の第3項が無視できて、

$$D^2 = k^2 (1 - i\omega/\nu k^2) \text{ or } k^2 \quad (23)$$

得られた解を境界条件(20)に代入すると、この解は次式となる。

$$\omega = \frac{1}{2} [\Gamma d - i\nu k^2 (1 + \sqrt{1 - 2i\Gamma d/\nu k^2})] \quad (24)$$

ただし根号は実部が正の方をとる。(24)は case 2 の steady state が短波長域において安定であることを示している。

次に長波長域 ($k^3 \ll \Gamma/\nu$) では、(21)式の第1項が無視できて、

$$D^2 = k^2 (1 + \Gamma/\nu k) \quad (25)$$

この解を境界条件(20)に代入すると、 $\tan \theta \cong 1$ では $\omega = \frac{1}{4} \Gamma d^2 / (d + \frac{1}{k})$ (26)

となり、やはり安定である。以上から case 2 では、攪乱流速の運動を支配する2つの項、即ち粘性項と定常流速の z 方向のずれに基く項の効果を個々に抽出した結果、いずれの場合にも攪乱の発散は起らなかった。図1のような一般的傾斜境界密度流においては、粘性と加速の両方の効果を併せ備えている。かような一般の境界面の安定性の議論をするためには、具体的な状況を設定して実験又は計算機によらねばならないと思われる。

参考文献 (1) Harleman, D.R.F. et al., Proc. ASCE 91, HY4, 43 他

(2) Chandrasekhar, S., "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability" 他

