II-136 有限要素法による拡散予測手法について

信州大学大学院　学生員　小林三男
同　工学部　正会員　荒木正夫
同　工学部　正会員　富所五郎

__1. はじめに__　近年，環境問題などから，水質の汚染予測をする必要が生じてきている。従来この種の問題は，現地観測，水理模型実験などで行なわれてきたが，最近では電子計算機によるシュミレーションも行なわれるようになった。本研究では，構造解析の分野で発達してきた有限要素法を拡散方程式に適用し，数値的に予測しようとするものであり，最初の段階として簡単なモデルによる例を扱かった。

__2. 有限要素法による定式化__　拡散場を支配する方程式は，$\frac{\partial\phi}{\partial t}+v_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)+K_1\phi-\phi_s=0$　(1)　で表わされる。ここにϕは濃度，v_kは流速，D_{x_k}は拡散係数，K_1は減衰定数，ϕ_sはわき出しである。場は二次元状態であるとし，$k=2$を考え，濃度は深さ方向に一定，流速などは時間の関数として与えられるものとする。解析はつぎの二段階にわたって行う。i) 時間変数は，連続変数として残し，空間に関して重み付き残差法の一つであるGalerkin法を用いて離散化する。ii) つぎに時間に関して差分式または漸化式により離散化する。

i) まず空間に関して離散化するために解析する領域を有限個の要素に分割して，その要素内で未知量ϕ^eを，形状関数Nを用いて $\phi^e=\phi_i N_i$ (2) のように内挿近似する。Galerkin法により重み関数として形状関数N_iを用い，(1)式に乗じて任意領域で積分すると $\int_A N_i\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+v_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(D_{x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)+K_1\phi-\phi_s\right)dA=0$　(2)式を代入して，部分積分によって微分の次数を下げ，さらに境界条件を考慮すると，次式のマトリックス方程式が得られる。

$$[\mathbb{C}]\left\{\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\}+[\mathbb{K}]\{\phi\}=\{\mathbb{F}\}\qquad(3)$$

ここにマトリックスの成分は $C_{ij}=\int_A N_iN_j\,dxdy$，$K_{ij}=\int_A\left(v_k\frac{\partial N_j}{\partial x_k}N_i+D_{x_k}\frac{\partial N_i}{\partial x_k}\frac{\partial N_j}{\partial x_k}+K_1N_iN_j\right)dxdy$，$f_i=\int_A\phi_sN_i\,dA+\int_c\frac{\partial\phi}{\partial n}N_i\,dc$ である。流速などが節点値で与えられている時は $u=u_iN_i$ のように内挿近似する。

ii) 時間に関する離散化に対してはexplicit-schemeの差分式，重み付き残差法を時間に関して用いる方法，漸化式による方法が考えられる。ここでは先の発表[1]で述べたように解の安定性，収束性の上から，重み付き残差法による方法によった。時間に関して一次の形状関数を用い，(3)式にGalerkin法を適用すると，

$$\left[\frac{1}{\Delta t}[\mathbb{C}]+\frac{2}{3}[\mathbb{K}]\right]\{\phi\}_{t+\Delta t}=\left[\frac{1}{\Delta t}[\mathbb{C}]-\frac{1}{3}[\mathbb{K}]\right]_t+\frac{2}{\Delta t^2}\int_t\{\mathbb{F}\}t\,dt\qquad(4)$$

が得られる。(4)式を各要素で評価し，全要素からの寄与を集め，連立方程式を解けば解が得られる。

結局，非定常拡散場を予測することは，(4)式を適当な初期条件，境界条件のもとで解くことに帰着される。しかし実際の問題にあたっては，解析はもっと複雑である。時間，空間的に変化する拡散係数，流速場などを決定することが重要で，単にインプット，アウトプットというだけでなく，物理性を十分に考慮しなければならない。また数値解析という観点からは，要素の形状，時間ステップΔtの取り方などが問題となってくる。

__3. 解析結果と考察__　モデル領域における非定常拡散予測の結果を図1～3に示す。解析に用いた領域はx方向に520 m，y方向に350 mの領域を仮定し，要素数551，節点数303，要素としては3節点三角形要素を用い，放出口附近では解の安定性を考慮して要素を細かく組んだ。拡散係数は$D_x=10.0\,m^2/s$，$D_y=10.0\,m^2/s$，放出口附近で$D_x=100.0\,m^2/s$，$D_y=100.0\,m^2/s$とし，減衰定数$K_1=0.00001$とした。また流速場は定常状態であるとしx方向流速$u=0.1\,m/s$，y方向の流速は，放出流速を1.5 m/sとし，slot-jet流速を計算し，線形にたし合せた。また濃度のわき出し$\phi_s=0.0$とした。時間ステップは$\Delta t=2.5\,s$とし，境界条件は，放出口の濃度を10.0と規定し，濃度の勾配は周囲で0とし，初期条件は，すべての節点で濃度0として計算を行なった。

図-1は，計算のくり返し回数Nと代表的な節点での解の収束の様子を表わしたもので，○×△記号は，図-

2中の○×△記号の位置に相当する。 解の収束の速度は、主に⊿tの値に依存する。 ⊿tの値の取り方としては、流れが代表的な要素を横切る時間とするのが物理的考慮からは妥当である。しかし(4)式が時間に関して一次の形状関数を用いて導びかれた式であるため本計算では上のような考えに基づいた⊿tでは値が大きすぎ、解の収束が遅い。 したがって本計算では、一次元の解析結果、計算時間などを考慮して⊿t=2.5秒とした。図-1より濃度の勾配の大きな節点では、くり返しのはじめにおいて解が振動しているが、くり返し回数Nが4以上では、比較的解が安定していることがわかる。 立ち上りの部分では、⊿tをどのように小さくしても、(4)式の性質上、また濃度の勾配が大きいために、多少の解の振動は避けがたい。 図-2は t=10.0 sec、図-3は t=67.5 secにおける濃度の分布を表わしたものである。 これより、時間と共に濃度の分布の広がる様子がよくわかる。 t=10.0 secでは、濃度1.0の影響範囲は、放出口より120mの所に位置するが、67.5 secでは、350m附近まで達している。 定常解との比較では、t=67.5 secでは、放出口附近では、ほとんど定常状態に達しているが先端では、濃度が増加しつつあることがわかる。

4. 終りに. 有限要素法による拡散予測の定式化と簡単な例による解析結果を示した。 有限要素法は、任意形状の要素を扱える、境界条件の取り扱いなどで差分法に比較して有利な点が多い。 しかし実際的な問題に適用するにあたっては、前述したように単純にはいかない面も多い。 今後の課題としては、さらに拡散現象の物理性、例えば鉛直方向の濃度の分布を考慮するとか、流速場との関連を考慮した解析を行なわなければならない。 また数値計算の観点からは、形状関数の改良、漸化式の改良、計算誤差の検討なども行なっていかなければならないと思う。

なお本計算に際しては、信州大学データステーションを経由して、東京大学大型計算機センターのHITAC 8800/8700を利用した。

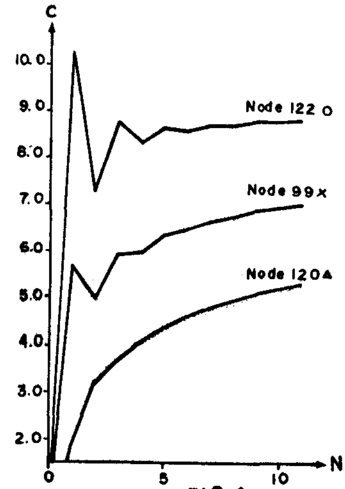

FIG-1

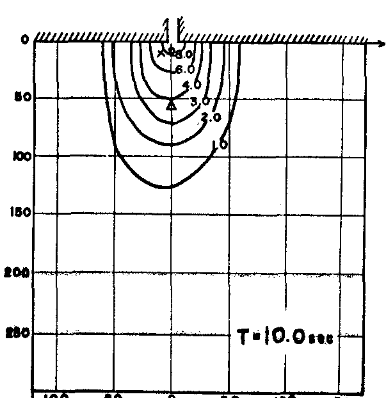

FIG-2

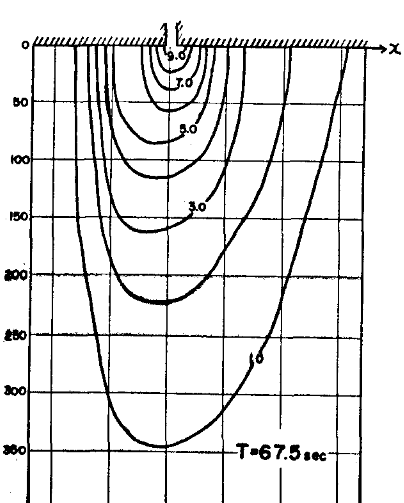

FIG-3

参考文献

1) 小林,荒木,宮所「有限要素法の水理学への応用」 52年度中部支部発表会

2) A. Louzik et al. "Transient Hydrothermal Analysis of Small Lakes" ASCE J.O.P.D PO2 349~364pp 1973