II-135 平均型2段階ラックスウェンドロッフ有限要素法について

○ 中央大学 土木工学科 正員 川原睦人
中央大学 大学院 学生員 大森俊介

1. 緒言

浅海域における海水の流況を把握することは，水質保全・環境保全・防災・航路埋没などの観点より，工学的に重要な問題のうちの一つである。近年この問題に対して，有限要素法による数値的解析が多く行なわれるようになってきており，著者らは，すでに2段階ラックスーウェンドロッフ有限要素法による解析法を提案した。空間座標に対して有限要素法により離散化を行い，時間関数に対する連立常微分方程式を得る。この方程式を積分する方法として，① 時間方向に差分を用い，逐次時間積分型の公式を得る。② 時間方向にも有限要素法を適用する。③ 周期解に着目する。などの方法が考えられる。

津波や高潮などの不規則波を問題にする場合には，①の逐次時間積分型公式による方法を用いる必要がある。ここでは，すでに発表した2段階ラックスーウェンドロッフ有限要素法をより改良し，平均型公式を得たので報告する。

2. 基礎方程式

ナビエーストークス方程式ならびに，連続の方程式を海底から水面まで積分し，次の浅海長波方程式を得る。流速 U_i，潮位 η，水深 H とし，総和規約による添字記法を用いている。

$$\dot{U}_i + U_j U_{i,j} + g\eta_{,i} - A_H U_{i,jj} + \tau_i = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{\eta} + \{(H+\eta)U_i\}_{,i} = 0 \qquad (2)$$

ここに，g，A_H は動加速度，渦動粘性係数で τ_i は海底摩擦である。通常の有限要素法によれば，式(1),(2)は，次のように離散化することができる。

$$M_{\alpha\beta}\dot{U}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}U_{\gamma i} + S_{\alpha i\beta j}U_{\beta j} + H_{\alpha i\beta}\eta_\beta + F_{\alpha i} = 0 \qquad (3)$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{\eta}_\beta + N_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}H_\gamma + N_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}\eta_\gamma = 0 \qquad (4)$$

ここに，

$$M_{\alpha\beta} = \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta)dV \quad K_{\alpha\beta\gamma j} = \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,j})dV \quad S_{\alpha i\beta j} = A_H\int_V (\Phi_{\alpha,i}\Phi_{\beta,j})dV$$

$$H_{\alpha i\beta} = \int_V (\Phi_\alpha \Phi_{\beta,i})dV \quad N_{\alpha\beta\gamma j} = \int_V (\Phi_\alpha \Phi_{\beta,j}\Phi_\gamma)dV + \int_V (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,j})dV$$

また，Φ_α，Φ_β は形状関数で，三角形有限要素内部においては，一次式で与えられるものとする。すなわち，次のように近似しておく。

$$U_i = \Phi_\alpha U_{\alpha i} \qquad \eta = \Phi_\alpha \eta_\alpha \qquad (5),(6)$$

3．平均型2段階ラックス－ウェンドロッフ法

式(3),(4)を積分するに至り，次のような逐次積分型公式を用いる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\cdot U_{\beta i}^{n+1/2} = M_{\alpha\beta}\overline{\overline{U}}_{\beta i}^{n} - \frac{\Delta t}{2}\left(K_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}^{n}U_{\gamma i}^{n} + S_{\alpha i\beta j}U_{\beta j}^{n} + H_{\alpha i\beta}\eta_{\beta}^{n} + F_{\alpha i}^{n}\right) \quad (7)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\cdot \eta_{\beta}^{n+1/2} = M_{\alpha\beta}\overline{\overline{\eta}}_{\beta}^{n} - \frac{\Delta t}{2}\left(N_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}^{n}\eta_{\gamma}^{n} + N_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}^{n}H_{\gamma}\right) \quad (8)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\cdot U_{\beta i}^{n+1} = M_{\alpha\beta}\overline{\overline{U}}_{\beta i}^{n} - \Delta t\left(K_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}^{n+1/2}U_{\gamma i}^{n+1/2} + S_{\alpha i\beta j}U_{\beta j}^{n+1/2} + H_{\alpha i\beta}\eta_{\beta}^{n+1/2} + F_{\alpha i}^{n+1/2}\right) \quad (9)$$

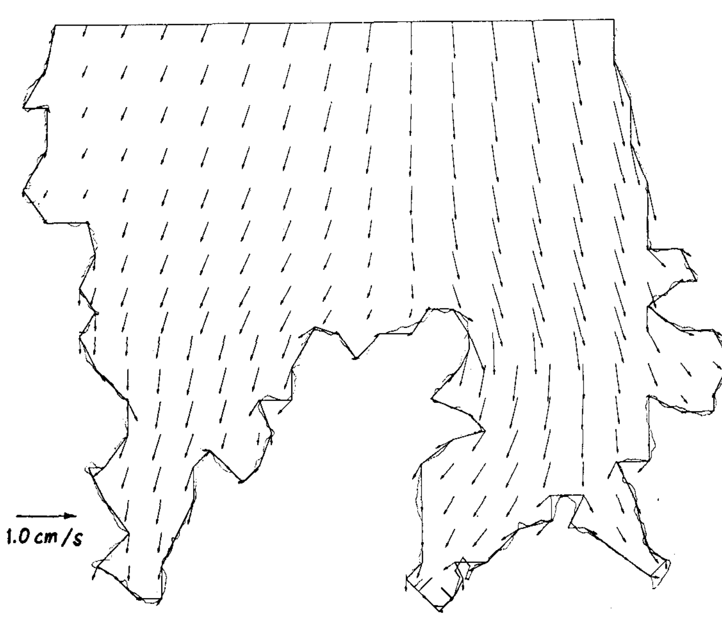
$$\bar{M}_{\alpha\beta}\cdot \eta_{\beta}^{n+1} = M_{\alpha\beta}\overline{\overline{\eta}}_{\beta}^{n} - \Delta t\left(N_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}^{n+1/2}\eta_{\gamma}^{n+1/2} + N_{\alpha\beta\gamma j}U_{\beta j}^{n+1/2}H_{\gamma}\right) \quad (10)$$

ここに，$\bar{M}_{\alpha\beta}$ は，行列 $M_{\alpha\beta}$ を対角要素に集中させた集中行列である。また $\overline{\overline{U}}_{\beta i}^{n}$，$\overline{\overline{\eta}}_{\beta}^{n}$ は，それぞれ着目する節点の周辺の要素の他の節点の値を平均して用いたものである。このようにすることにより，計算を安定にすることが可能となる。実際の数値実験の結果では，平均型公式を用いた方が，平均型公式を用いない場合に比べて3倍程度の時間区間を用いることができた。

4．数値計算例

式(7)～(10)における積分公式によって，釜石湾の潮流解析を行った。境界条件としては，湾口部において，日周潮と半日周潮よりなる潮位を与えて，湾内の流速と潮位を求めたものである。分割要素と総節点数はそれぞれ 442 と 275 であった。時間分割 Δt は 15.0 秒で，HITAC 8800/8700 により，全24時間計算を行うのに計 58 分を要した。

図は，計算結果として24時間後の流速分布を示したものである。



5．参考文献

1) 川原睦人・竹内則雄・首藤伸夫：2段階ラックス－ウェンドロフ有限要素法による潮流解析，第23回海岸工学講演会論文集，PP. 498～501，1976

2) 川原睦人・川上俊雄・船越晴世・長谷川賢一：有限要素法と摂動法を用いた流動および拡散計算手法の開発，第23回海岸工学講演会論文集，PP. 524～528，1976