

東京大学大学院 学生員 ○福島祐介
東京大学工学部 正員 玉井信行

まぎわき 有限要素法によって粘性流の解析を行うため、温度方程式と温度と流れ関数の関係式とを基礎方程式として有限要素方程式を求め、多数の円柱列の間の流れを解析した。また、水とグリセリンの混合液を用いて円柱の間の流れ形状を実験的に求め有限要素法の解との比較を試みた。

基礎方程式 二次元、非圧縮の流れは温度方程式と温度と流れ関数の関係式として記述される。これらに対する有限要素方程式は Galerkin 法を用いることにより次のように表わされる。

$$a_{ij} \dot{\omega}^j + c_{ijk} \phi^k \omega^j + \nu v_{ij} \omega^j = S_i \quad \dots (1) \quad b_{ij} \phi^j = t_i + d_{ij} \omega^j \quad \dots (2)$$

$$a_{ij} = \int_A \Omega_i \Omega_j dA \quad c_{ijk} = \int_A E_{\phi k} \Omega_i \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{\phi}^k}{\partial x_\beta} dA \quad v_{ij} = \int_A \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_\alpha} dA \quad S_i = \int_{S_w} \Omega_i n_\alpha m_\alpha \omega^i dA$$

$$b_{ij} = \int_A \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial x_\alpha} dA \quad d_{ij} = \int_A \bar{\phi}_i \Omega_j dA \quad t_i = \int_{S_w} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x_\alpha} \bar{q} ds \quad \dots (3)$$

ここで、 $x_\alpha (\alpha=1,2)$ はカルト座標、 $E_{\phi k}$ はエグザントンのイプシロン、 ν は動粘性係数であり、 ω^i , ϕ^i は温度 ω と流れ関数 ϕ の節点での値で時間 t の関数、 Ω_i , $\bar{\phi}_i$ はそれらに対する補間関数で空間座標のみ関数である。

(1), (2) 式は時間 t の常微分方程式であり、これを時間方向に積分すれば解が求められるが、その際、壁面での温度の値 ω_B が必要となる。 ω_B は、壁面での no-slip の条件と、要素内の流れ関数と温度の関係から求められ、次のように表わされる。

$$\omega_B = \frac{3}{4} \frac{h^2}{A^2} (\phi_B - \phi_0) - \frac{1}{2} \omega_0 \quad \dots (4)$$

計算は (1), (2) 式を差分化して行なった。まず、領域全体が滑らかでありとして、(2) 式から Potential 流の ϕ を計算し、(4) 式から壁面での温度 ω_B を求め、(1) 式によって領域全体の温度 ω を求める。次のステップでは、前回の温度 ω を (2) 式に代入し ϕ を求め、(4) 式を通して (1) 式によって新たな温度を求める。同様な手順を繰り返して解が定常になるまで計算を行なう。

計算結果及び考察 有限要素として、温度を 3 節長、流れ関数を 6 節長で与える三角形要素を用い、図 1 に示される 7 種類の円柱配列の流れを計算した。総節長数は A-B について 341, 387 である。計算結果を円柱係数、平均流速 U 及び無次元化した流れ図が図 2, 図 3 である。また、同様の配列で行なった実験結果を図 4, 図 5 に示す。実験は水とグリセリンの混合液の中で円柱を動かして、表面に浮べたアルミ粉末をトレーサとして流れを直接写真撮影したものである。計算結果と実験結果は定性的に一致し粘性流の解析においても有限要素法がある程度有効であることを示している。しかし、配列 A では $Re=50$ 程度まで計算できたが、B では $Re=12$ までしか計算できず、流れによって適用範囲が異なるであろうことも推測された。これは、配列 A では一様な円柱の流れに近く、移流項が定量的には小さく非線形性も弱いが、配列 B では渦領域が極めて低い Re 数でもあらわれていることからわかるように、移流項の効果が大きく定量的な非線形性が強く残っているためであると思われる。また配列 B の実験結果は、計算結果より小さな Re 数で流れが非対称になっているが、これは、計算では圧力勾配で流れを完全な二次元流れと想定しているのに対し、実験は自由表面での流れを取っているためであろう。

結論 粘性流の解析に対し有限要素法はある程度有効である。しかし、流れによって得られる解が何処なる Re 数の範囲で求められるかが重要なことが予想され、その適用において注意を要する。

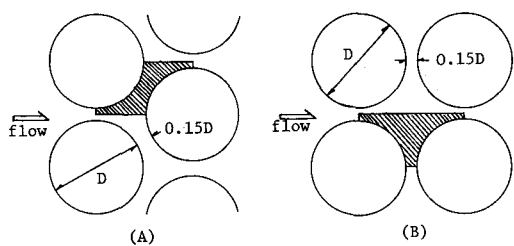


図1 円柱配列 (計算領域: 斜線部)

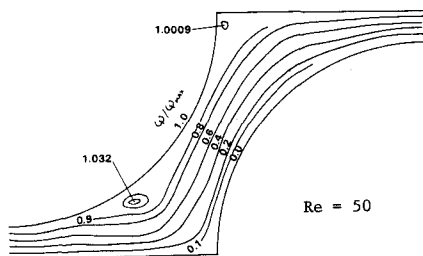
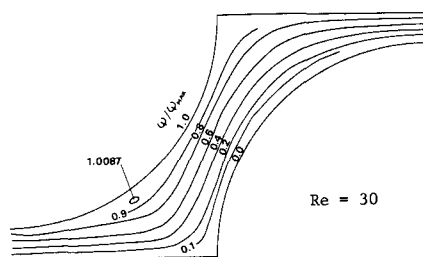
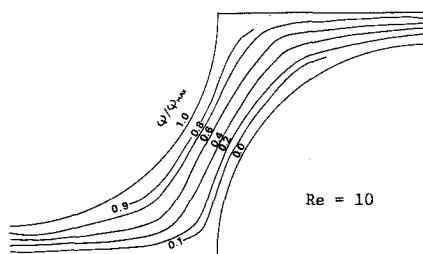


図2 計算された流線 配列A. $\psi_{max} = 1.15$

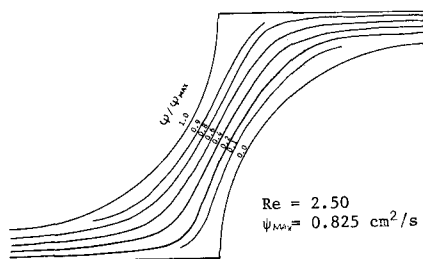


図4 実験結果 配列A $\nu = 0.572 \text{ cm}^2/\text{s}$, $D = 0.9 \text{ cm}$

注: 図2~図5において流は左から右

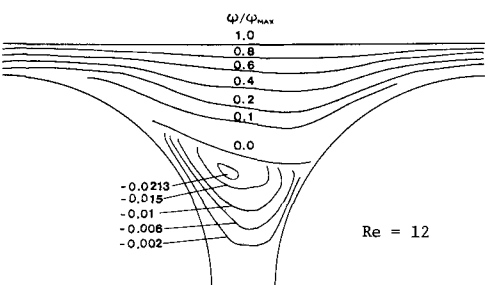
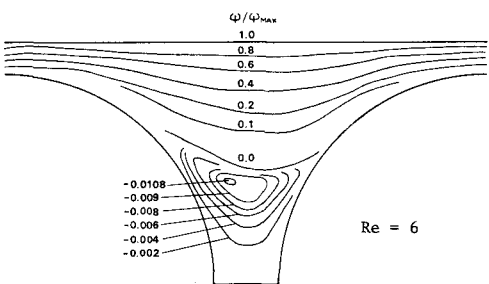
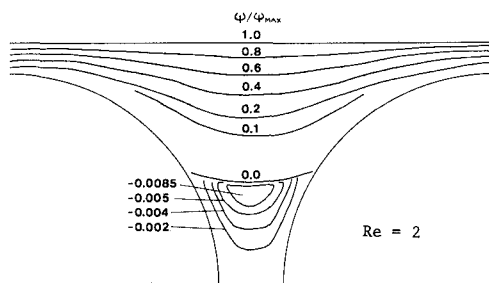


図3 計算された流線 配列B $\psi_{max} = 1.15$

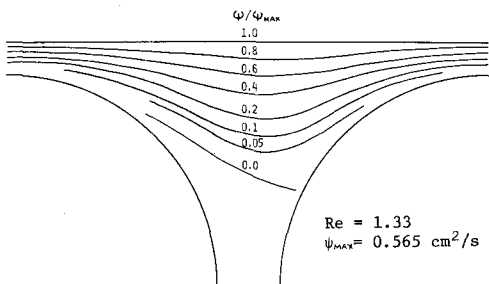
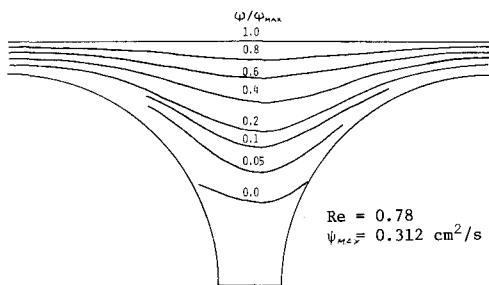


図5 実験結果 配列B $\nu = 0.696 \text{ cm}^2/\text{s}$ (上) $D = 0.9 \text{ cm}$
 $\nu = 0.733 \text{ cm}^2/\text{s}$ (下)