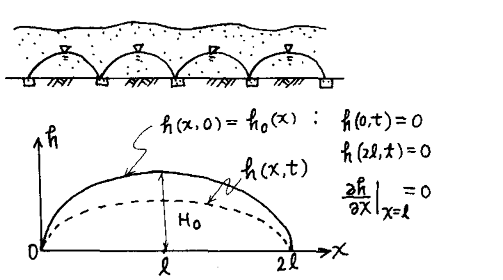
II-130　非線形微分方程式の数値解法と誤差についての一考察

神戸大学工学部　学生員　○東野　一，正員　川谷　健

1．まえがき　自由地下水の非定常運動に関する基礎微分方程式は，いろいろな仮定を導入しても，放物型の非線形な偏微分方程式となる[1]。一般に，微分方程式が線形であっても，その解を解析的に求め得るのはきわめて限られた初期・境界条件についてだけであり，非線形な微分方程式のときには増々困難となる。それゆえ，微分方程式を差分方程式系に置き換えて近似し，数値計算を行うことが多い。この場合も，差分式が線形ならば安定性(そして収束性も)は初期・境界条件に依存せず，解析的な方法によって差分式系が収束・安定性をもつか否かを判定できる[2]。しかし，微分方程式が非線形であり，対応する差分式系も非線形となる場合には，その収束・安定性の解析的判定は実質的に不可能で，さらに，数値計算もむずかしくなる。そのため，非線形な差分式系をとり扱うとき，差分化の過程で線形化が行われているか，あるいは数値計算の過程でそれが行われるかして，解が求められる。しかし，各々の手法によって得られた数値解は必ずしも一致しているとはいえない。ここでは，簡単な放物型の非線形な偏微分方程式を色々な方法で差分式に近似して数値解を求め，それと微分方程式の厳密解とを比較・検討することによって，手法と精度について何らかの指標を得ようとした結果について報告する。

2．偏微分方程式と厳密解　自由地下水の非定常運動に関するもっとも簡単な偏微分方程式は，$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{k}{n}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)$ であり，非定常流のBoussinesqの式といわれる[1]。この式は，Dupuitの仮定を採用し，帯水層が等方等質で，その下の不透水層が水平としたときに得られる。（h＝水深 又は水平な不透水層よりのpiezometric head，k＝透水係数，n＝空隙率）。いま，図-1に示されるように，不透水層内に設けられた2本の平行な地下排水渠の間に形成される自由水面の時々刻々の位置を求めるために，上式を，境界条件 $h(0,t)=0$，および $(\partial h/\partial x)_{x=l}=0$，初期条件 $h(x,0)=h_0(x)$ のもとで解くと，$h(x,t)=h_0(x)/\left(1+1.115\frac{kH_0}{nl^2}t\right)$ なる厳密解が得られる[3]。ここで，$H_0=h_0(l)$ である。いま，$X=x/l$，$u=h/H$，$u_0=h_0/H_0$，$T=t/(nl^2/kH_0)$ なる無次元量を導入すると，Boussinesqの式は，$\frac{\partial u}{\partial T}=\frac{\partial}{\partial X}\left(u\frac{\partial u}{\partial X}\right)$ ----(1) となり，厳密解は，$u(X,T)=u_0(X)/(1+1.115T)$ ···(2) となる。



図－1

3．微分方程式の差分化　以下に，式(1)の差分化の手法を列挙する。ここで，$u_i=u(i\Delta X,T)$ は既知量，$U_i=u(i\Delta X,T+\Delta T)$ は未知量をあらわすものとする。また，$r=\Delta T/(\Delta X)^2$ である。式(1)は，$\frac{\partial u}{\partial T}=u\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2$ ····(3)　あるいは，$\frac{\partial u}{\partial T}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial X^2}$ ····(4) と書き直せる。

［手法E-1, Explicit法］　式(3)から，$(U_i-u_i)/\Delta T=u_i(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})/(\Delta X)^2+(u_{i+1}-u_{i-1})^2/(2\Delta X)^2$，つまり，$U_i=u_i+r\{u_i(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})+(u_{i+1}-u_{i-1})^2/4\}$ となり，未知量 U_i は既知量 u_{i+1},u_i,u_{i-1} から求められる。

［手法E-2, Explicit法］　式(4)から，$(U_i-u_i)/\Delta T=\frac{1}{2}\left\{(u_{i+1}^2-2u_i^2+u_{i-1}^2)/(\Delta X)^2\right\}$，つまり，$U_i$ は，$U_i=u_i+r(u_{i+1}^2-2u_i^2+u_{i-1}^2)/2$ より算定される。

［手法I-1, Implicit法］　式(3)から，$(U_i-u_i)/\Delta T=U_i(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})/(\Delta X)^2+(U_{i+1}-U_{i-1})^2/(2\Delta X)^2$，これを U_i について整理すると，$2rU_i^2+\{1-r(U_{i+1}+U_{i-1})\}U_i-r(U_{i+1}-U_{i-1})^2/4-u_i=0$ という U_i の二次方程式が得られる。したがって，$U_i=(\sqrt{B^2-4AC}-B)/2A$，$A=2r$，$B=1-r(U_{i+1}-U_{i-1})$，

$C=-r(U_{i+1}-U_{i-1})^2/4-u_i$ で算定される。

数値計算には, Gauss-Seidel の反復法を適用する。

〔手法I-2, Implicit法〕 上記の手法と同様であるが, $u(\partial^2 u/\partial x^2)$ に対応する項を, $u_i(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})$ で近似して, U_i に関する二次式が生ずるのを避ける。つまり,

$$U_i=\{u_i+ru_i(U_{i+1}+U_{i-1})+r(U_{i+1}-U_{i-1})^2/4\}/(1+2ru_i)$$

を用い, Gauss-Seidel の反復法により算定する。

〔手法I-3, Implicit法〕 手法I-1の差分式は,

$$U_i=u_i+rU_i(U_{i+1}-2U_i+U_{i-1})+r(U_{i+1}-U_{i-1})^2/4$$

とも表わされる。したがって, 反復計算で $m+1$ 回目の値 $U_i^{(m+1)}$ は, m 回目の試算値 $U_i^{(m)}$ を用いて,

$$U_i^{(m+1)}=f(U_{i+1}^{(m)},U_i^{(m)},U_{i-1}^{(m+1)})$$ で算定される。

〔手法I-4, Implicit法〕 式(4)から,

$$(U_i-u_i)/\Delta T=\frac{1}{2}\{\theta(U_{i+1}^2-2U_i^2+U_{i-1}^2)/(\Delta X)^2+(1-\theta)(u_{i+1}^2-2u_i^2+u_{i-1}^2)/(\Delta X)^2\}$$ を得る。これに,

$U_i^2\simeq u_i^2+2u_i(U_i-u_i)=2u_iU_i-u_i^2$ を代入し, $\theta=1/2$ とすると,

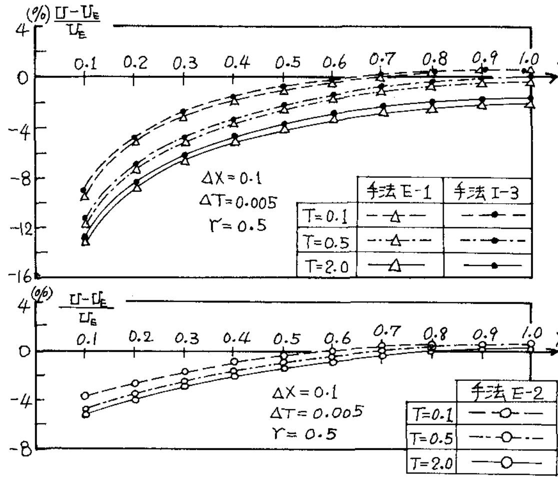
$U_i=\{u_i+r(u_{i+1}U_{i+1}+u_{i-1}U_{i-1})\}/(1+ru_i)$ を得る。これに, Gauss-Seidel 法を適用する。

各手法の数値解と厳密解の比較を, 図−2,3,4,5に示す。Explicit法では $r=1/2$, Implicit法では $r=5$ とした。Explicit法, Implicit法とも式(4)による差分化「手法E-2」と「手法I-4」が好結果を与えている。

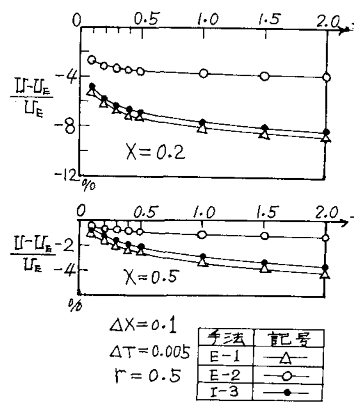
参考文献 1) Bear, J.「Dynamics of fluid in porous media」, 1972.

2) 野木達夫「数値計算上の問題点(I)」土木学会誌, 1973, 7.

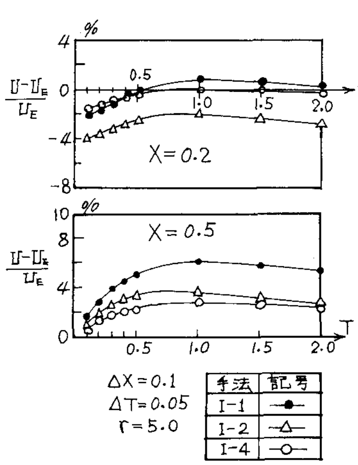
3) Polubarinova-Kochina, P. Y.「Theory of ground water movement」, 1962.



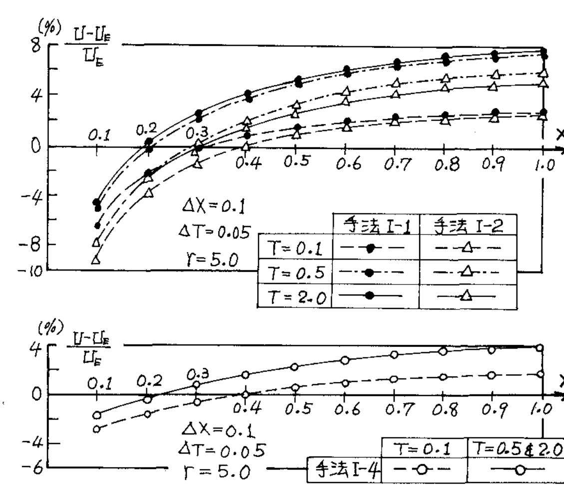
図−2 (U_E: 厳密解, U: 数値解)



図−3



図−5



図−4 (U_E: 厳密解, U: 数値解)