II-100　Transfer Function モデルによる時系列解析

秋田工専　正　長谷部正彦

1 まえがき

本報告は、日流量時系列（夏季の日流量）を transfer function models を用いて、流出解析および予測を試みて検討した。この解析では、入力系列 X_t，出力系列 Y_t とすると、入力 X_t に関する transfer function model と noise model との合成されたモデルを用いる。noise models の適用には、ARIMAモデルを採用した。なお、解析地点は、雄物川水系柳田橋流量（$A=477.3\ Km^2$），日降水量としては、湯沢，院内，湯の俣，秋の宮の各観測所で 7，8，9月の3ヶ月間の日系列で、期間は、1957～1973までのデーターである。

2 Transfer Function Noise Models

transfer function モデルについて X_t, Y_t との関係式は、①式となる。

$$\left.\begin{aligned} & Y_t = v(B) X_t \\ \text{or}\quad & Y_t = \delta^{-1}(B)\,\omega(B)\,X_{t-b} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots ①$$

ここで　B；後進演算子

$$v(B) = (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \cdots + v_m B^m + \cdots)$$
$$\delta(B) = (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \delta_3 B^3 - \cdots - \delta_r B^r)$$
$$\omega(B) = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \omega_3 B^3 - \cdots - \omega_s B^s)$$

それゆえ各演算子の関係は、下記のようになり，同定の時の初期値の決定に使われる。

$$v(B)\,\delta(B) = \omega(B)\,B^b$$

また①式のモデルを（r, s, b）と表示される。

次に noise model N_t を考えて①式に加えると transfer function noise model ができる。一般的な式で表わすと②式ができる。

$$\left.\begin{aligned} & y_t = v(B)\,x_t + n_t \\ \text{or}\quad & y_t = \delta^{-1}(B)\,\omega(B)\,x_{t-b} + n_t \end{aligned}\right\} \cdots\cdots ②$$

ここで　$y_t = \nabla^d Y_t$，$x_t = \nabla^d X_t$，$n_t = \nabla^d N_t$　　但し $\nabla = 1 - B$

noise model の同定、評価は、次のようにおこなわれる。

x_t 系列を prewhitening して白色雑音 α_t の系列を得る。

$$\phi_x(B)\,\theta_x^{-1}(B)\,x_t = \alpha_t$$

y_t 系列にも同じ演算子を作用させて β_t の系列にする。

$$\phi_x(B)\,\theta_x^{-1}(B)\,y_t = \beta_t$$

②式に $\phi_x(B)\cdot\theta_x^{-1}(B)$ を乗じて整理すると

$$\beta_t = v(B)\,\alpha_t + \varepsilon_t$$

となる。但し $\varepsilon_t = \phi_x(B)\cdot\theta_x^{-1}(B)\,n_t$ である。

この ε_t に ARIMA モデル

$$a_t = \phi(B)\,\theta^{-1}(B)\,\varepsilon_t$$

を適用して noise モデルが決定される。

a_t，白色雑音　$\varphi(B)$，自己回帰項子

3　適用例

本文では、2つのモデルを検討した。

1例は、降水量を予測できたと仮定して、その当日の降水量をも使って、日流量を予測した場合のモデル（2，1，0），他は、前日までの日降水量を使って、日流量を予測したモデル（1，1，1）の2例である。前者のモデルは、相互相関係数が $\tau=0$ のときに有効であろう。後者の場合は、本報告の場合の様に相互相関係数が $\tau=1$日でピークがあるときに適用されるであろう。

（2，1，0）モデルは、

$$Y_t = \frac{\omega_0 - \omega_1 B}{1-\delta_1 B - \delta_2 B^2} X_t + \frac{1}{1-\varphi_1 B - \varphi_2 B^2} a_t$$

（1，1，1）モデルは、

$$Y_t = \frac{\omega_0 - \omega_1 B}{1-\delta_1 B} X_{t-1} + \frac{1}{1-\varphi_1 B - \varphi_2 B^2} a_t$$

となる。

各モデルの同定，評価した結果の係数を表1，表2に示す。またモデルは、相互相関係数、自己相関係数（残差系列）を使用して，*transfer function* モデル，*noise* モデルの両モデルを統計的に検討して決定される。

このモデルより、1日ごとに予測して、30日間の月平均値と標準偏差の予測値と実測値との比較を表3に示す。

特に、（1，1，1）モデルの例で、S37，S40年では．δ_1が1以上になり、定常条件をみたしていないので、この様な結果となりモデルとしては、妥当でない。

理由として $d=0$ にとったためであると思われる。

本報告では、2つのモデルに対して，15年間（S45，S46年は除かれている。）共通のモデルを適用したが、個々の年について、個々のモデルを考える必要性もあるだろう。

なお、本報告では、原系列を X_t，Y_t として採用している。（$d=0$ の場合．である。）

参考文献

Box．Jenkins：*Time series analysis forcasting and control*．Hannan：*Multiple Time series*，

年	ω_0	ω_1	δ_1	δ_2	φ_1	φ_2
32	0.580	−1.178	0.195	0.139	0.563	−0.258
33	1.644	−2.296	0.222	0.079	−0.017	0.015
34	1.684	−2.531	0.093	0.132	0.365	−0.118
35	0.256	−1.086	0.343	0.033	0.390	−0.129
36	0.091	−1.615	0.290	0.129	0.268	−0.113
37	0.291	−0.491	0.243	0.487	0.411	0.067
38	0.052	−0.861	0.391	−0.004	0.468	0.101
39	0.304	−1.026	0.296	0.165	0.006	0.106
40	0.284	−1.370	0.171	0.270	0.208	0.163
41	0.134	−1.646	0.395	0.097	0.760	−0.027
42	0.161	−0.996	0.500	0.033	0.735	−0.052
43	0.027	−2.247	0.164	0.136	0.316	−0.123
44	1.147	−3.546	0.241	0.222	0.377	0.128
47	0.066	−1.872	0.400	−0.102	0.236	−0.135
48	0.120	−0.543	0.404	0.139	0.517	−0.096

表－1

年	ω_0	ω_1	δ_1	φ_1	φ_2
32	1.291	0.617	0.735	0.392	−0.219
33	2.661	0.644	0.513	0.001	0.011
34	2.688	1.799	0.845	0.207	−0.098
35	1.174	0.103	0.438	0.313	−0.113
36	1.641	0.702	0.725	0.364	−0.120
37	0.562	0.411	1.227	0.304	0.082
38	0.881	0.008	0.381	0.429	0.105
39	1.116	0.489	0.779	0.036	0.106
40	1.419	1.629	1.373	0.235	0.162
41	1.699	0.396	0.636	0.768	−0.027
42	1.077	0.066	0.566	0.699	−0.050
43	2.252	1.850	0.987	0.338	−0.126
44	3.822	2.510	0.964	0.474	0.061
47	1.898	−0.484	0.141	0.265	−0.146
48	0.592	0.174	0.727	0.446	−0.065

表－2

年		(2，1，0)モデル		(1，1，1)モデル	
		Mean	Stand.	Mean	Stand.
32	A	21.1	8.54		
	C	12.9	7.01	12.0	7.62
33		67.2	80.96		
		54.9	57.60	40.8	48.55
34		30.8	42.96		
		31.4	42.27	29.6	39.82
35		16.7	13.50		
		11.8	11.05	10.5	11.72
36		19.5	10.33		
		20.5	16.38	22.9	16.64
37		14.3	9.55		
		18.2	9.69	7052.5	10142.98
38		15.0	6.45		
		12.8	8.85	12.4	8.96
39		23.6	16.27		
		25.3	15.37	27.8	15.53
40		17.5	23.22		
		19.3	17.86	10692.1	20591.44
41		11.0	8.80		
		12.6	16.60	12.6	17.60
42		20.6	11.53		
		17.9	12.86	17.3	13.84
43		13.1	10.78		
		9.6	14.83	68.1	14.12
44		19.1	17.69		
		28.6	42.51	52.9	44.53
47		40.3	32.26		
		22.1	29.02	22.5	28.77
48		18.5	9.34		
		15.4	7.76	15.4	7.69

表－3