II-92　確率微分方程式の離散時間サンプリング値に対するモデルについて

北海道大学工学部　正員　浜中建一郎

1. まえがき

工学をとりまく種々の現象に確率モデルをあてはめるとき、時間に対し連続的な取り扱いと離散的な場合とがあり、対象としている現象が連続であっても測定値の整理の容易さから離散的に取り扱うことが多い。そこで時間的に連続な確率過程と離散的な確率モデルとの関係を調べることの一つとして、n階の線形確率微分方程式で表わされる確率過程がどの様な離散モデルで表示されるかを導いた。これまでに、Bartlett[1]は2階の確率微分方程式に対する離散表示を示し、Ulrych[2]はその結果からの推測として、n階の確率微分方程式のサンプリングはn, n-1次の自己回帰－移動平均(ARMA)過程で表わされると述べた。著者の結果は、Bartlettの表示とは一致したが、Ulrychの推測とは異った。

2. n階確率微分方程式の離散表示

n階確率微分方程式をW(t)をウィナー過程として次の様に与える。

$$a_0 X^{(n)}(t) + a_1 X^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n X(t) = W'(t) \qquad \text{---} \; (1)$$

この2次定常な解は、文献(3)より

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-s)\,dW_s \qquad \text{ただし} \quad h(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}$$

$r_1, r_2, \cdots, r_n$ は(1)式の仰有方程式の根 ----- (2)

$$c_1, c_2, \cdots, c_n \text{ は } \quad h^{(k)}(0) = \begin{cases} 1/a_0 & k = n-1 \\ 0 & 0 \le k < n-1 \end{cases} \quad \text{を満す}$$

ここで解の安定性を仮定する。すなわち $r_i < 0,\ i = 1, \cdots, n$。又仰有方程式の根は全て異なるものとする。

(2)式を離散表示するには、$\Delta t = p$ として

$$x_j(t+p) = \int_{-\infty}^{t+p} c_j e^{r_j(t+p-s)} dW_s = \int_{-\infty}^{t} c_j e^{r_j(t+p-s)} dW_s + \int_{t}^{t+p} c_j e^{r_j(t+p-s)} dW_s = e^{r_j p} x_j(t) + \sigma_j(t+p) \qquad \text{-----} \; (3)$$

の関係を用いて

$$X(t+p) = \sum_{j=1}^{n} x_j(t+p) = \sum_{j=1}^{n} e^{r_j p} x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(t+p) \qquad \text{----} \; (4)$$

これからUlrychの推測に従ってARMA表示に近ずける。そのため次の式を用意する。

$$\begin{aligned} X(k-1) &= x_1(k-1) + x_2(k-1) + \cdots + x_n(k-1) \\ X(k) &= e_1 x_1(k-1) + e_2 x_2(k-1) + \cdots + e_n x_n(k-1) + \Delta_k \cdot [1] \end{aligned} \qquad j, k = 1, \cdots, n \qquad \text{-----} \; (5)$$

ただし　$X(k) = X(t+kp)$,　$x_j(k) = x_j(t+kp)$,　$e_j = e^{r_j p}$,　$[1] = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

$\sigma_j(k) = \sigma_j(t+kp)$,　$\Delta_k = [\sigma_1(k), \sigma_2(k), \cdots, \sigma_n(k)]$

(5)式から(3)式の関係を用いて x_1 から順次 x_ℓ まで消去していくと

$$\begin{aligned} X(k) - {}^{\ell}A_1 X(k-1) + \cdots + (-1)^{\ell}\, {}^{\ell}A_\ell X(k-\ell) &= (e_{\ell+1} - e_1)\{x_{\ell+1}(k-1) - {}^{\ell}B_{11} x_{\ell+1}(k-2) + \cdots + (-1)^{\ell-1}\, {}^{\ell}B_{\ell-1,1} x_{\ell+1}(k-\ell)\} + \cdots \\ \cdots + (e_n - e_1)\{x_n(k-1) - {}^{\ell}B_{11} x_n(k-2) + \cdots &+ (-1)^{\ell-1}\, {}^{\ell}B_{\ell-1,1} x_n(k-\ell)\} + \Delta_k \cdot [1] + \Delta_{k-1} \cdot {}^{\ell}\mathbb{B}_1 + \cdots + (-1)^{\ell-1} \Delta_{k-\ell+1}\, {}^{\ell}\mathbb{B}_{\ell-1} \;,\; k = 1, \cdots, n \end{aligned} \qquad \text{---} \; (6)$$

ただし

$${}^{\ell}A_1 = \sum_{i=1}^{\ell} e_i \;,\quad {}^{\ell}A_2 = \sum_{i_1=1}^{\ell-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{\ell} e_{i_1} e_{i_2} \;,\quad {}^{\ell}A_3 = \sum_{i_1=1}^{\ell-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{\ell-1} \sum_{i_3=i_2+1}^{\ell} e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} \;,\; \cdots \;,\; {}^{\ell}A_\ell = e_1 e_2 \cdots e_\ell$$

$${}^{\ell}B_{1j} = \sum_{i=1}^{\ell} e_i \;\; i \ne j \;,\quad {}^{\ell}B_{2j} = \sum_{i_1=1}^{\ell-1} \sum_{i_2=i_1+1}^{\ell} e_{i_1} e_{i_2} \;\; \begin{smallmatrix} i_1 \ne j \\ i_2 \ne j \end{smallmatrix} \;,\; \cdots\cdots \;,\; {}^{\ell}B_{\ell-1,j} = e_1 \cdots e_{j-1} e_{j+1} \cdots e_\ell$$

$${}^{\ell}\mathbb{B}_j = [{}^{\ell}B_{j1}, \cdots, {}^{\ell}B_{j\ell}, {}^{\ell}B_{j1}, \cdots, {}^{\ell}B_{j1}]^T \qquad T \text{ は転置行列を示す}$$

$\ell = n$ まで消去を続けると結局次の式が導ける。係数の左肩の添字 ℓ は不要になるから消略して

$$X(k) - A_1 X(k-1) + \cdots + (-1)^n A_n X(k-n) = \Delta_k \cdot [1] - \Delta_{k-1} \cdot \mathbb{B}_1 + \cdots + \Delta_{k-n+1} \cdot \mathbb{B}_{n-1} \qquad \text{----} \; (7)$$

ここで　$Y(k)=\Delta_k\cdot[1]$　と置くと、$Y(k)$は(3)式より独立正規確率系列となる。次に(7)式の右辺の第2項以下の性質を見る。${}^{j}\hat{Y}(k-j)=\Delta_{k-j}\cdot\mathbb{B}_j$，$T=t+(k-j)p$　と置くと、(3)式の積分に戻って

$$Y(k-j)=\int_{T-p}^{T}\left\{c_1e^{r_1(T-s)}+c_2e^{r_2(T-s)}+\cdots+c_ne^{r_n(T-s)}\right\}dW_s \qquad \text{----} \quad (8)$$

$${}^{j}\hat{Y}(k-j)=\int_{T-p}^{T}\left\{B_{j1}c_1e^{r_1(T-s)}+B_{j2}c_2e^{r_2(T-s)}+\cdots+B_{jn}c_ne^{r_n(T-s)}\right\}dW_s \qquad \text{----} \quad (9)$$

と書けて、${}^{j}\hat{Y}$はYに条件付けられた正規確率変数と見ることが出来る。

一般に　$A=\int_{t_1}^{t_2}a(t)dW_t$，$B=\int_{t_1}^{t_2}b(t)dW_t$　とすると、Aのもとでの Bの条件付確率は、$W'(t)$　のパラメータをσ^2とし

$$\text{条件付平均}\ E\{B|A\}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}a(t)b(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2}a^2(t)\,dt}A\ ,\ \text{条件付分散}\ V\{B|A\}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}a^2(t)b^2(t)\,dt-\left\{\int_{t_1}^{t_2}a(t)b(t)\,dt\right\}^2}{\int_{t_1}^{t_2}a^2(t)\,dt}\sigma^2 \quad \cdots (10)$$

を持つ正規分布をなし、これを用いて${}^{j}\hat{Y}$のYのもとでの条件付確率が具体的に求まる。

これまで(1)式の保有方程式が全て異なる根を持つとしたが、m重根を含む場合は(3)式の解の中に

$x_i(t)=\int_{-\infty}^{t}c_it^ie^{r_m(t-s)}dW_s$，$i=0,\cdots,m-1$　の形の項が含まれてき、これは

$x_i(t+p)=\int_{-\infty}^{t+p}c_i(t+p)^ie^{r_m(t+p-s)}dW_s=d_0e^{r_mp}x_0(t)+\cdots+d_ie^{r_mp}x_i(t)+d_0\sigma_1+\cdots+d_i\sigma_i$，　$d_j=\binom{i}{j}\frac{c_i}{c_j}$

の関係を用いることにより、(7)式に比し係数の内容がかなり複雑になるが同じ様に導かれるだろう。

3.　2階確率微分方程式の例

(7)式を導くにあたって変数の置きかえがあって直感的な理解が困難と思われるのでここで例として、2階の場合をより具体的に示す。簡単のため　$a_0=1$　として

$$X^{(2)}(t)+a_1X^{(1)}(t)+a_2X(t)=W'(t) \qquad \text{---} \ (11)$$

保有方程式が異なる2根を持つとすると、

$$h(t)=\frac{e^{r_1t}-e^{r_2t}}{r_1-r_2}=c(e^{r_1t}-e^{r_2t})\quad ,\ c=\frac{1}{r_1-r_2}$$

前節と同様　$\Delta t=p$　として

$$X(k)-(e^{r_1p}+e^{r_2p})X(k-1)+e^{(r_1+r_2)p}X(k-2)$$
$$=\Delta_k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-\Delta_{k-1}\begin{bmatrix}e^{r_2p}\\e^{r_1p}\end{bmatrix}=Y(k)-\hat{Y}(k-1) \qquad \text{---} \ (12)$$

$\hat{Y}(k-1)$ の $Y(k-1)$ のもとでの条件付確率は (8) (9) (10) より

$$F=\int_{-p}^{0}c^2(e^{-r_1t}-e^{-r_2t})^2dt$$

$$G=\int_{-p}^{0}c^2(e^{r_2p}e^{-r_1t}-e^{r_1p}e^{-r_2t})^2dt$$

$$H=\int_{-p}^{0}c^2(e^{-r_1t}-e^{-r_2t})(e^{r_2p}e^{-r_1t}-e^{r_1p}e^{-r_2t})\,dt$$

とすると、

$$E\{\hat{Y}|Y\}=\frac{H}{F}Y\quad ,\ V\{\hat{Y}|Y\}=\frac{FG-H^2}{F}\sigma^2$$

又、Y，$\hat{Y}$の各々の分散は

$$\sigma_Y=F\sigma^2\quad ,\ \sigma_{\hat{Y}}=G\sigma^2$$

4. 自己共分散

(12)式より自己共分散の漸化式を求める。(12)式の両辺に $X(k)$, $X(k-1)$, $X(k-2)$, $Y(k)$, $\hat{Y}(k)$, $\hat{Y}(k-1)$をかけ　平均し、

$E\{Y\hat{Y}\}=-H\sigma^2$を導き、それを用いることにより

$$\begin{cases}R(0)+A_1R(1)+A_2R(2)=(F+G+A_1H)\sigma^2\\ R(1)+A_1R(0)+A_2R(1)=-H\sigma^2\\ R(2)+A_1R(1)+A_2R(0)=0\end{cases} \qquad \cdots (13)$$

$$A_1=-(e^{r_1p}+e^{r_2p}),\quad A_2=e^{(r_1+r_2)p}$$

5. あとがき

これまで述べてきたように、線形確率微分方程式の離散表示は、正確にはARMA過程とはならないことが分った。ただし、1階の場合だけは一次の自己回帰過程となる。又、(7)式は工学的には、確率微分方程式で表わされる過程から等間隔でサンプリングした値を、間隔の大きさにかかわらずシミュレートする場合、有効であると思われる。又、同定、予測等に関しては、今後の問題である。

参考文献

(1) Bartlett, M.S., On the theoretical specification and sampling property of autocorrelated time series, J. Roy. Statist. Soc., B8, 27-41, (1946)

(2) Ulrych, T.J. & Bishop, T.N., Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition, Review of Geophy. and Space Phy., 13, No1, 183-200 (1975)

(3) ホーエル＝ポート＝ストーン，確率過程入門，東京図書，(1974)