

電通開発(株) 正員 藤野浩一

東京工業大学 正員 日野幹雄

東京工業大学 正員 砂田壽吾

1. はじめに: 降雨一流出応答系は、しばしば強い非線型性を示す。しかも入力である降雨は、一般にガウス分布ではない。入力がガウス分布の非線型系の同定法に δ -delay correlation 法がある。筆者らは先に、入力が非ガウス分布でかつガウス分布からのズレの小さい場合にこれを拡張する方法を発表した³⁾。本報ではさらにこの方法の一般化を試みた。ここでは二次の核まで具体的に求めたが、三次以上の核についても同様な議論から同定が可能である。

2. 理論: 1) Volterra Series いま、ある非線型系への入力 $x(t)$, 出力 $y(t)$ とすれば、出力 $y(t)$ は Volterra Series により次のように表わされる。

$$y(t) = y_0 + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\sigma_1) x(t-\sigma_1) d\sigma_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\sigma_1, \sigma_2) x(t-\sigma_1) x(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \dots \quad (1)$$

本報では式(1)と二次の項で打ち切って議論をすすめる。三次以上についても同一の方法で高次核の同定ができる。

2) 平均入力・平均出力 $x(t)$ を平均 E_x と変動分 $x'(t)$ とに分け $x(t) = E_x + x'(t)$ として式(1)に代入し、入力がゼロのとき、出力もゼロである条件より $y_0 \equiv 0$ であることを用いれば、式(1)の出力の平均は次式となる。

$$\bar{y} = E_x \int K_1 d\sigma + E_x^2 \iint K_2 d\sigma_1 d\sigma_2 + k_2 \int K_2 d\sigma \quad (k_2 = \overline{x'(t)x'(t-\sigma)} d\sigma) \quad (2)$$

式(2)は、平均出力 $\bar{y}$ が平均入力レベル E_x のみならず、入力の二次モーメント k_2 にも関係することと示しており、これは線型系にない性質である。実際に入出力データが与えられた場合には、それぞれの平均値からの変動はすぐ計算されるから、出力についても平均値よりのズレ y'' を次のように定義する。すなわち、

$$y'' = y - \bar{y} = \int K_1(\sigma) x'(t-\sigma) d\sigma + 2E_x \iint K_2(\sigma_1, \sigma_2) x'(t-\sigma_1) x'(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \iint K_2(\sigma_1, \sigma_2) x'(t-\sigma_1) x'(t-\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 - k_2 \int K_2(\sigma, \sigma) d\sigma \quad (3)$$

3) 核の同定 式(4)に順次 $x'(t-\tau)$, $x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)$ と掛けたのち平均をとると次式を得る。

$$\overline{x'(t-\tau)y''(t)} = \int K_1(\sigma) \overline{x'(t-\sigma)x'(t-\tau)} d\sigma + 2E_x \iint K_2(\sigma_1, \sigma_2) \overline{x'(t-\sigma_1)x'(t-\tau)} d\sigma_1 d\sigma_2 + \iint K_2(\sigma_1, \sigma_2) \overline{x'(t-\sigma_1)x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)x'(t-\tau)} d\sigma_1 d\sigma_2 - k_2 \int K_2(\sigma, \sigma) \overline{x'(t-\tau)x'(t-\tau)} d\sigma \quad (4)$$

$$\overline{x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)y''(t)} = \int K_1(\sigma) \overline{x'(t-\sigma)x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)} d\sigma + 2E_x \iint K_2(\sigma_1, \sigma_2) \overline{x'(t-\sigma_1)x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)} d\sigma_1 d\sigma_2 + \iint K_2(\sigma_1, \sigma_2) \overline{x'(t-\sigma_1)x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)x'(t-\tau_3)} d\sigma_1 d\sigma_2 - k_2 \int K_2(\sigma, \sigma) \overline{x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)} d\sigma \quad (5)$$

式(4), (5)における x' の三次モーメントは次のようになる。

$$\overline{x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)x'(t-\tau)} = k_3 \cdot \theta(\tau_1-\tau, \tau_2-\tau) \quad (6)$$

ただし、 $k_3 = \iint \overline{x'(t)x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2$ であり、 θ は次の性質をもつ。

$$\theta(\tau_1, \tau_2) \begin{cases} = \infty & (\tau_1 = \tau_2 = 0) \\ = 0 & \end{cases}, \quad \int \theta(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 = \delta(\sigma_2), \quad \iint \theta(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 = 1$$

— お、式(6)における x' の四次モーメントは次のようになる。

$$\overline{x'(t_1)x'(t_2)x'(t_3)x'(t_4)} = (k_4)^2 [\delta(t_1-t_2)\delta(t_3-t_4) + \delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4) + \delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)] \quad (7)$$

式(6), (7)を用いて式(4), (5)の右辺を計算すれば, 最終的に,

$$\langle \text{式(4)の右辺} \rangle = k_2 K_1(\tau) + 2E_x k_2 \int K_2(\tau, \sigma_2) d\sigma_2 + k_3 K_2(\tau, \tau) \quad (8)$$

$$\langle \text{式(5)の右辺} \rangle = \frac{k_3}{k_2} K_1(\tau_1) \delta(\tau_1 - \tau_2) + 2E_x k_3 \int K_2(\tau, \sigma_2) d\sigma_2 \delta(\tau_1 - \tau_2) + 2(k_2)^2 K_2(\tau_1, \tau_2) \quad (9)$$

以上の二式のうち, $\delta(\tau_1 - \tau_2)$ のかかっている項を消すためには, 式(5)において, $\tilde{y}(t)$ の代りに次式で定義される $\tilde{\tilde{y}}(t)$ を用いよう。

$$\tilde{\tilde{y}}(t) = y(t) - \bar{y} - \left(\frac{k_3}{k_2} \right) K_1(\tau_1) - 2E_x \left(\frac{k_3}{k_2} \right) \int K_2(\tau, \sigma) d\sigma \quad (10)$$

上式には, K_1, K_2 には x' の分布が片寄りともつこと ($\overline{x'^3} \neq 0$) の影響と, 入力 x' の平均が零でないことの影響に対する補正項が含まれている。

以上より, 一次および二次の核は次のように求まる。

$$K_1(\tau) = [\overline{x'(t-\tau)\tilde{\tilde{y}}(t)} - 2E_x k_2 \int K_2(\tau, \sigma) d\sigma - k_3 K_2(\tau, \tau)] / k_2 \quad (11)$$

$$K_2(\tau_1, \tau_2) = \overline{x'(t-\tau_1)x'(t-\tau_2)\tilde{\tilde{y}}(t)} / 2(k_2)^2 \quad (12)$$

一般に一次の核 K_1 に較べて二次の核 K_2 のオーダーは小さいから, 式(10)の第3項 ($\overline{x'^3}/\overline{x'^2}$) $K_2(\tau, \tau)$ の影響は少ないであろう。これに反し, K_2 を求める式(12)の分母に単に $2(\overline{x'^2})^2$ としたのでは K_2 の推定は大きくなる。前報で K_2 の計算値で分母にある係数 α を掛けなければならなかったのは, “ $\overline{x'^3}$ は零に近い” という仮定が満たされていなかったことによる。

3. シミュレーションデータによる検討: 一次, 二次の核 K_1, K_2 を設定し式(1)によりシミュレーションデータ ($N=512$ 個) を作った。本報の方法を検討するために K_2 のオーダーを K_1 のオーダーに比し極端に大きく与えてある。図-1, 図-2(a)(太線)はシミュレーションデータに与えられた K_2, K_1 である。入力 $x(t)$ には 平均値 = 0, 標準偏差 = 1.0 のガウス分布乱数列をもとに次の2種類のシリーズを用意し, 通常の遅延フィルタ-相関法と本報による一般法とを比較した。

(i) 正規分布乱数: 入力が Gaussian white noise の場合の核の同定および出力推定は図-2のとおりである。当然, 両法の結果に差はない。

(ii) 片振れの正規分布乱数: 上記の乱数列に正の部分のみの片振れとするため $|x(t)|$ と採りこれを入力とした。結果は図-3のようになり, 通常法に比較し, 修正パラメータ α を用いないにもかかわらず, 一般法の推定結果の方がはるかに良好であることが判る。

本研究は, 文部省科研費 (“確率統計数学の総合化と実用化の研究”, 085064, 代表者: 日野幹雄) の補助を受けた。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Wiener, N.: Nonlinear Problem in Random Theory, MIT Press (1958)
- 2) Lee, Y.W. & Schetzen, M.: Measurement of non-linear system by cross-correlation, Int. J. Control, Vol. 2, no. 3, 237-254 (1965)
- 3) 日野・砂田: 非線型応答系の同定における遅延フィルタ-相関法の拡張と実用化の出力予報への適用 (健報), 東工土木工務科研究報告, No. 20, 31-68 (1976)

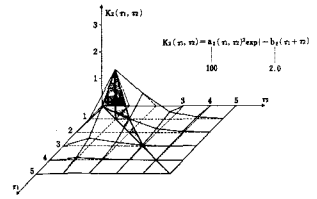


図-1 シミュレーションデータに与えられた2次の非線型核

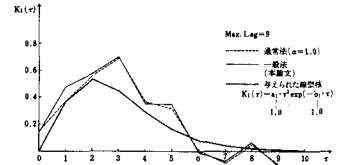


図-2(a) 同定された線型核の比較(データ(i))

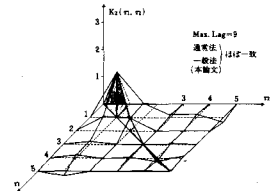


図-2(b) 同定された2次の非線型核(データ(ii))

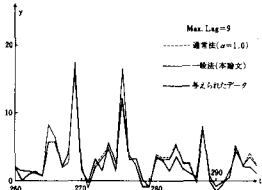


図-2(c) 出力推定結果の比較(データ(i))

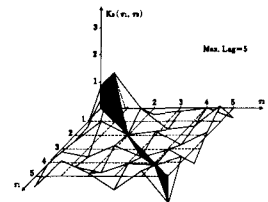


図-3(a) 一般法(本論文)による2次の非線型核(データ(ii))

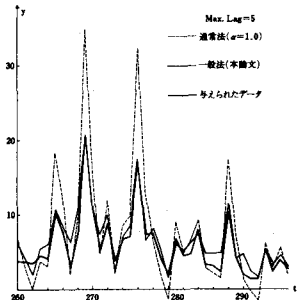


図-3(b) 出力推定結果の比較(データ(ii))