II-84　一般逆マトリックスを用いた流出核の同定

北海道大学工学部　学生員　◎　福島　英晃
同　上　正　員　藤田　睦博

1　一般逆マトリックス

A を m 行 n 列のマトリックスとする時

$$AX = Y \qquad (1)$$

(1) 式において X を一義的に求めることはできない。しかしながら

$$AA^{-}Y = Y \qquad (2)$$

を満足するマトリックス A^{-} が存在することが知られている。A^{-} は、一般逆マトリックスと呼ばれ、A^{-} が A の一般逆マトリックスであるための必要十分条件は[1]

$$AA^{-}A = A \qquad (3)$$

が成立することが知られている。したがって A が正方マトリックスでない場合、又は特異マトリックスであっても、通常の逆マトリックスと同様に

$$X = A^{-}Y \qquad (4)$$

として X を定義できる。ただし、A^{-} は一意に定まらず種々の A^{-} が存在する。

一方、流出量が降雨量の線形結合式で表わされるものと仮定すると (1) 式において X，Y をそれぞれ降雨量，流出量，又 A を変換マトリックス (流出核) と考えることができる。この場合、X，Y は既知でマトリックス A を未知と考えると、X の一般逆マトリックスを X^{-} として $X^{-}X$ を (1) 式の左から乗じて、(3) 式の関係を用いると

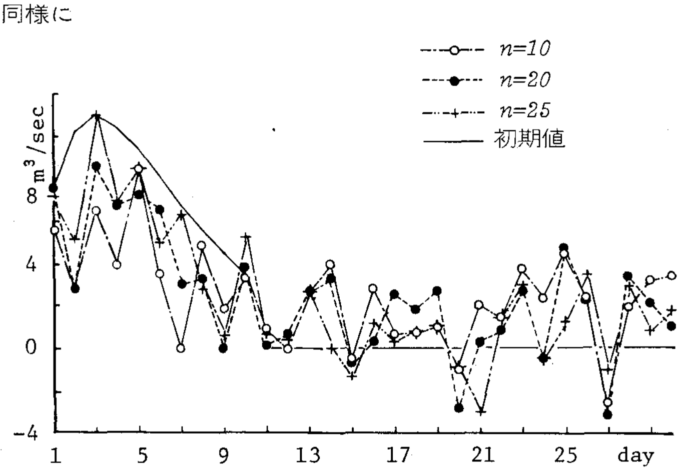


図- 1

$$A = YX^{-} \qquad (5)$$

とすることができる。X，Y は、マトリックスでもよい。X を $m \times n$ $(m>n)$ のマトリックスとすると、Penrose[2] による一般逆マトリックスは $\mathrm{Rank}(X)=n$ の時

$$X^{-} = X^{T}(XX^{T})^{-} \qquad (6)$$

で与えられる。したがって、A は $m \times m$ のマトリックスとなる。例えば、n 年間の8月の降雨，流出量資料を用いて流出核を求める時、マトリックス X の要素 x_{ij} は j 年 ($j=1,2,\ldots,n$) i 日の日降雨量と考えればよい。同様に y_{ij} にもその流出量が対応している。この時、(5) 式で示されるマトリックス A の要素 $a_{lk}, k=1,\ldots m$ は l 日目の流出量を求めるための核となる。a_{lk} が k のみに依存して l に独立な時には

$$[a_{lk}] = [h_k] \qquad k=1,2,\ldots,m \qquad (7)$$

とおくと

$$X^{T}H = Q \qquad (8)$$

ただし、H は h_i $i=1,2,\ldots m$ を要素とする列ベクトル，Q は y_{ml} $l=1,2,\ldots m$ を要素とする列ベクトルである。(8) 式は、未知数 m，条件式 n (この場合 $m>n$) の連立方程式となるので、その近似解 ($\hat{H}$) の一つとして最短右側インバース法を採用すると $\hat{H} = X(X^{T}X)^{-1}Q \qquad (9)$

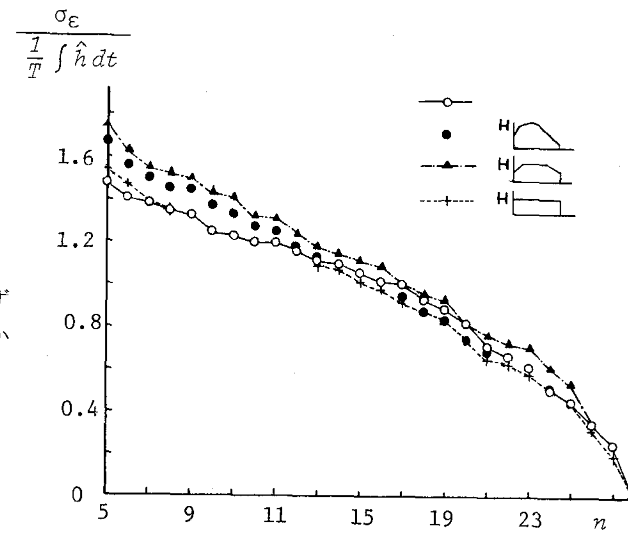
$X(X^{T}X)^{-1}$ も又 (3) 式を満足している。図一1は、H と X を与え Q を (8) 式で計算した後、H をかくして (9) 式により種々の条件下 ($m=30$，$n=10,20,25$) で解を求めた例を示す。

$$\sum_{i=1}^{m} h_i = \sum_{i=1}^{m} \hat{h}_i \qquad (10)$$

が成立しており、条件式の数nが少ない程平らな $\hat{h}_i$ が求まる。

図ー2は、Hを固定してXを変化させた場合、Xを固定してHを変化させた場合（—o—で表わした）に付き10例ずつ計算し、$n=5, 6, \ldots, 30$の時のHと$\hat{H}$によるQと$\hat{Q}$の誤差の標準偏差 σ_ε の平均値を示したものである。

これによると σ_ε は、HやXの形に依存せず n についてだいたい一定値をとることがわかる。



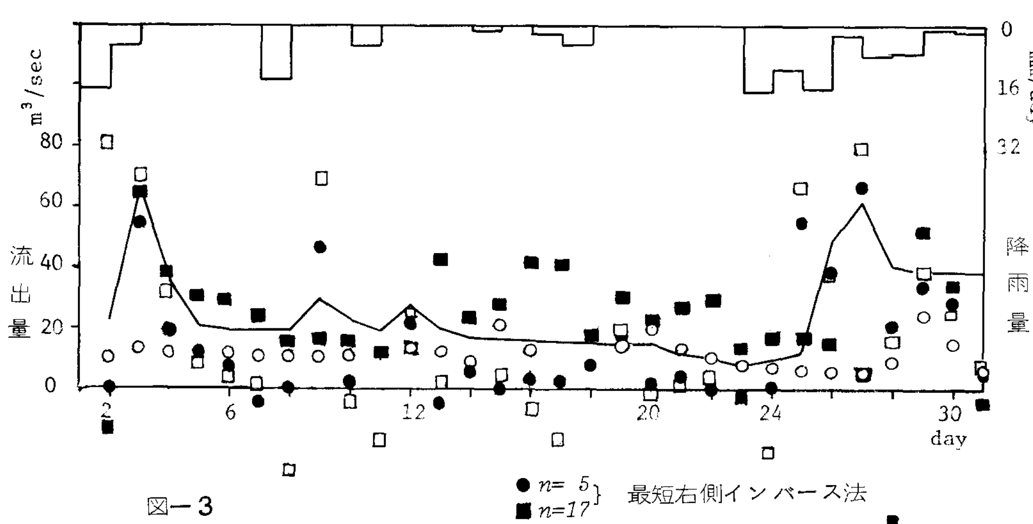
図ー2

2 実測資料を用いた計算例

1952 年から 1971 年にわたる北海道の雨龍川流域の多度志における日流出量及び、沼田、幌加内、朱鞠内における流域平均日降雨量を用いた計算例を示す。なを、降雨量、流出量は資料数の関係及び、夏期の台風性の洪水を対象とする意味で8月、9月の資料を用い、又観測値そのままの値で計算を行なった。

計算においては(6)式、(9)式よりそれぞれ流出核を同定し、使用した年の資料とは別の年の8月の雨から流出量を再現させた。 図ー3は、1953から1967年の降雨、流出量資料から、1968年の8月の流出量の再現値を、条件式の数nの少ない場合と多い場合について比較したものである。シュミレーションでは、n が多くなると図ー1からも解る様に再現値の精度は向上していくが、実測値を用いた計算の場合、資料それ自身の誤差の影響も大きく、n を大きくしても必ずしも精度は向上していないが、一般にはnを

それほど大きくできない事を考慮すれば、nが小さい時には最短右側インバース法が、n が大きな時には一般逆マトリックスを用いた手法が、比較的安定した解を与えている。



図ー3

参考文献

1) 渋谷政昭,国辺国士： 一般逆マトリックスとその応用,東京図書,昭和48年

2) 竹内啓：線形数学,培風館

3) 高橋安人：システムと制御,岩波書店,1972