II-67　洪水の時・空間生起確率算定法

京都大学　大学院　学生員　横田　篤
京都大学　工学部　正　員　高棹琢馬
京都大学　工学部　正　員　池淵周一

〔1〕はしがき

治水計画は通常，計画基準点で定められたある確率年（あるいは超過確率）の計画降雨を流出変換し，その計画洪水量に対処するように策定される。しかし，治水計画策定の現況は，流域をLumpedした形での評価を不十分なものとしている。つまり，1)流域に多くの防災対象地区が出現し，最下流計画基準点のみを対象としておれない。2)多数の既設ダムによる洪水コントロール，大規模な土地利用の改変など，洪水流況への人為的作用が大きくなってきている。本研究は，こうした問題点を解決するために，降雨の時・空間従属性，ダム操作・破堤氾濫効果を導入した洪水の生起確率算定法を提案し，水系一貫した治水計画策定の一助にしようとするものである。

〔2〕洪水の時・空間生起確率算定法

1．基本となる算定法； 洪水の生起確率をつぎのような仮定に基づいて算定する。つまり，1)流入量（降雨あるいは単位流域の流出量）は一様でないマルコフ連鎖に従属した確率変数である。2)河川システムは単位流域の複合体で構成され，単位流域からの流出量は線形合流しながら流下する。いま，簡単のため，図－1に示すような河川システムをとりあげると，合流点$J_1, J_2, \cdots, J_n$に時刻tに流入した互いに空間的・時間的に従属した$I_1(t), I_2(t), \cdots, I_n(t)$単位の洪水量（各流入量は離散的な値$0, 1, \cdots, S$をとると仮定）は，洪水波の合流点$J_2, J_3, \cdots, J_{n+1}$への到達時間$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$を考慮すると，$r$地点には$I_1(t)+I_2(t+\tau_1)+\cdots+I_r(t+\sum_{i=1}^{r-1}\tau_i)$なる洪水量をもたらす。したがって，この合成流量の生起確率を求めればよいことになる。この一様でない有限状態マルコフ連鎖に従属した確率変数の和はshift operation（$*$）[1]を用いることによって次式のように与えられる。

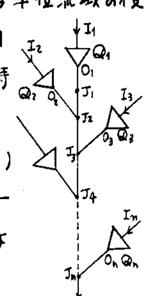

図-1

$$\mathbb{U}_r(t+\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{r-1}) = \mathbb{P}_1(t) * \mathbb{P}_2(t+\tau_1) * \cdots * \mathbb{P}_r(t+\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{r-1}),\ \mathbb{U}_r\cdot\mathbb{E} = \{P_0^{(r)}(t+\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{r-1}), \cdots, P_{rs}^{(r)}(t+\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{r-1})\} \cdots (1)$$

ここに，$\mathbb{P}_1(t)=\{P_0^{(1)}(t), P_1^{(1)}(t), \cdots, P_S^{(1)}(t)\}$，$\mathbb{P}_k(t+\sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell)=P_r\{I_k(t+\sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell)=j \mid I_{k-1}(t+\sum_{\ell=1}^{k-2}\tau_\ell)=i\}=\{P_{ij}^{(k)}(t+\sum_{\ell=1}^{k-1}\tau_\ell)\}$，$\acute{\mathbb{E}}=(1,1,\cdots,1)$，である。

このように考えると，r地点での河道疏通能力F_rとの比較から，洪水の生起確率g_rが次式で与えられる。

$$g_r(t+\sum_{\ell=1}^{r-1}\tau_\ell)=P_r\{I_r(t+\sum_{\ell=1}^{r-1}\tau_\ell)>F_r\}=1-\sum_{i=1}^{[F_r]}P_i^{(r)}(t+\sum_{\ell=1}^{r-1}\tau_\ell) \cdots (2)$$

ここに，$[F_r]$はF_rの整数部を表わす。

以上の展開はダム操作がなく，またr地点までに破堤氾濫がない場合の算定法であったが，つぎにダム操作および破堤氾濫の効果を導入した場合への拡張を考えよう。

2．ダム操作，破堤氾濫効果を導入した算定法； いま前図の各支川にダムがあって，一定量放流あるいは一定率・一定量放流にみられるダム操作がおこなわれたとき，その放流量で構成される洪水流量の生起確率を算定しよう。これらの放流操作を簡単のため，流入量－放流量の変換行列で表現されるとする。つまり，その変換行列$\mathbb{Q}_\ell$を$\mathbb{Q}_\ell=\{P_r(O_\ell=j \mid I_\ell=i)\}$で与えると，ある流入量$I_{\ell-1}$に対して放流量$O_\ell$に関する遷移行列は$\{P_r(O_\ell=j \mid I_{\ell-1}=i)\}=\mathbb{P}_\ell\cdot\mathbb{Q}_\ell$で表現される。したがって，時刻$t+\sum_{\ell=1}^{r-1}\tau_\ell$で合流点$J_r$を通過する放流量系列の合計$\sum_{\ell=1}^{r}O_\ell$の確率分布は若干の考察ののち，(1)式の拡張的な形として次のように算定される。

$$\mathbb{V}_r=(\cdots(((\mathbb{P}_1*\mathbb{I})\mathbb{Q}_1)'*(\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2))*\cdots)*(\mathbb{P}_r\mathbb{Q}_r),\ \mathbb{V}_r\cdot\mathbb{E}=\{\pi_0^{(r)}, \pi_1^{(r)}, \cdots, \pi_{rs}^{(r)}\}' \cdots (3)$$

ただし，上式においてはℓ段階後に得られる$(S\ell+1)\times(S+1)$行列のi行j列要素の中で$P_j^{(\ell)}$を含む項について以下のような操作をした後に，右側から$P_{\ell+1}Q_{\ell+1}$をshift operationする，というルールを保持しなければならない。つまり，$P_j^{(\ell)}$の添字jが$(S\ell+1)\times(S+1)$行列の列番号jから1を引いた値に等しい場合にはそのままの位置に，一致しない場合はその項をi行$j+1$列に移行するという操作である。もちろん，(1)式は(3)式において変換行列Qを単位行列$\mathbb{I}$に置きかえた結果である。

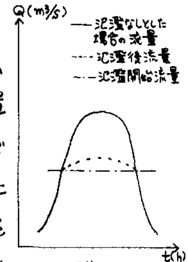

図-2 氾濫前後のハイドログラフ

一方，破堤氾濫効果は厳密には氾濫解析を通して議論しなければならないが，淀川流域での氾濫解析などを考慮すると，いまの問題に対しては図-2に示すような流下率[2)]なる概念で置きかえても十分精度がある。このことは，破堤氾濫効果が流下率を導入した氾濫前後のハイドログラフから変換マトリックスを構成することによって考慮できることを意味している。したがって，河道疏通能力以上は上記の流下率で，疏通能力以内は単位行列で変換マトリックスを構成すれば，ダム操作と同様の展開で破堤氾濫効果を導入した洪水の生起確率を算定することができる。もちろん，ダム操作，破堤氾濫効果を導入した場合の洪水の生起確率は$P_r\{O_r(t+\sum_{\ell=1}^{r-1}\tau_\ell)>F_r\}$として求まる。

3．より複雑な河川システムへの拡張；以上，降雨の空間的、時間的従属性のもとで，図-1に示す河川システムの自然状態およびダム操作・破堤氾濫効果を考慮した場合の洪水の生起確率を算定する方法を展開した。もちろん，支川や本川にダムあるいは破堤氾濫箇所がいくつもある複雑な河川システムへの拡張も，変換行列およびshift operationを組み合わせていくことによって可能である。たとえば，図-3のような河川システムにおいては以下の手順をとることにより洪水の生起確率が算定される。図においてQ_iはI_iとO_iの変換マトリックス，R_iは破堤氾濫マトリックスを表わしている。1)合流点J_2での合成流量の生起確率S_2は$S_2=(P_1Q_1)*(P_2*\mathbb{I})$ 2)S_2の構成要素$P_{ij}P_{km}$の添字kに着目する。$k=0$のときは1列に，$k=1$のときは2列に，$k=2$のときは3列に，……，とそれぞれ要素を移動した行列をS_2°とし，その右側からP_3Q_3をshift operationする。すなわち，$S_3=S_2^{\circ}*(P_3Q_3)$ 3)遊水池R_1で変換された後のr_1地点での合成流量の生起確率T_1は$T_1=R_1'*S_3$，ここに $'$ は転置を意味する。4)T_1を2)と同様なルールにしたがい修正し，修正後の行列をT_1°とする。5)合流点J_4では$S_4=T_1^{\circ}*P_4$ 6)O_4で変換された後は，$S_5=Q_4'\cdot S_4$となる。7)I_5, I_6の流入量をうけてR_2で変換された後のr_2地点での合成流量の生起確率T_2は$T_2=R_2'\cdot\{(P_5*\mathbb{I})*P_6\}$ 8)T_2の各行の成分を加えたものが各行の成分内容となる。その成分内容の各要素の最初にあるP_iP_{ij}のP_iを$P_{0i}P_{ij}, P_{1i}P_{ij}, \cdots$におきかえたものをその行の1列，2列，…，成分とする。このように修正した行列をT_2°とする。9)よって，合流点J_6での合成流量の生起確率S_6は$S_6=S_5*T_2^{\circ}$となり，◎地点での通過流量の生起確率は$S_6\cdot E$の各行の値として求まる。ただし，$E'=[1, 1, \cdots, 1]$とする。

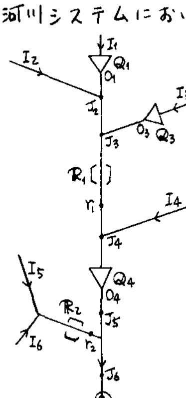

図-3

〔3〕あとがき

このようにして算定された洪水の生起確率は水系一貫した治水計画の安全度さらには各施設の治水効果などを評価する一つの計画情報となろう。ただ，ここでは洪水流下の線形合流を，また単位流域では暗黙のうちに豪雨ハイエトグラフから損失雨量を分離した有効雨量がある時間遅れでそのまま末端流出量になること，さらにはダム放流操作が流入量の関数で表現されることなどを仮定しており，離散化の単位流量，実際上の解析目的などとも関連して，今後，さらにこうした仮定・前提が満足されるように理論展開を再構成する必要があろう。

〔参考文献〕

1) W. J. Conover; The distribution of $\sum_{t=0}^{n} f(Y_t)$, where $(Y_0, Y_1, \cdots)$ is a realization of a non-homogeneous finite-state Markov chain, Biometrika 52 (1965), No1　2) 稲田裕；貯水池群による淀川水系の最適洪水調節に関する研究，京都大学学位論文，昭52. 1.