

清水建設 海洋開発部 正員 小林 浩
清水建設 海洋開発部 正員 〇清川哲志

1. はじめに

近年大型海洋構造物に働く波力の3次元解析法として、グリーン関数を用いる方法が多く研究者によって支持され、その有効性についてはほとんど異論はないようである。しかしその反面グリーン関数が積分領域内に特異点を持っており、それを数値積分によって求めなければならないという困難さに対する明解な解決法はいまだに確立されてないように思う。本研究では特異点の計算にグリーン関数の積分形を用い、基礎方程式は日野・宮永¹⁾にしたがいグリーン関数の定理より導いた。そして円筒構造物についてMacCamy & Fuchsによる回折理論で求めた解析解と比較して、この方法が必ずしもグリーン関数の定理が仮定している単連結領域でなくても有効である事を確かめ、さらに角筒構造物等について数値解を求めた。

2. 理論

問題を微小振幅波に限定すれば、その線形性により入射波と散乱波の重ね合せとして解が得られる。入射波のポテンシャル関数は既知であるから、波の回折の問題は散乱波のポテンシャル関数を求める事に帰着され、3次元ラプラス方程式の境界値問題となる。ここではラプラス方程式をグリーン関数を用いてこれと同等な積分方程式に置き換えて数値解法を行う。グリーン関数とはもとの問題に対して有限個の特異点を除いて、方程式と境界条件を満足する関数の事である。

入射波、散乱波のポテンシャルをそれぞれ次のように表わす。

$$\text{入射波: } \phi_{in} = \phi_{in}(x, y, z) \exp(-i\sigma t) \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{反射波: } \phi_{sc} = \phi_{sc}(x, y, z) \exp(-i\sigma t) \quad \dots\dots (2)$$

したがって、散乱波のポテンシャル ϕ_{sc} 、およびグリーン関数 G に関する方程式と境界条件は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi_{sc}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{sc}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{sc}}{\partial z^2} = 0 \quad \dots (3) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = -\delta(r) \quad \dots (8)$$

$$\frac{\partial \phi_{sc}}{\partial z} = 0 \quad (a_1 z = -h) \quad \dots (4) \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (a_1 z = -h) \quad \dots (9)$$

$$\frac{\partial \phi_{sc}}{\partial z} = \lambda \phi_{sc} \quad (a_1 z = 0) \quad \dots (5) \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \lambda G \quad (a_1 z = 0) \quad \dots (10)$$

$$\frac{\partial \phi_{sc}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_{in}}{\partial n} \quad (O_n S) \quad \dots (6) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^{3/2} \left(\frac{\partial G}{\partial R} - i k G \right) = 0 \quad \dots (11)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{3/2} \left(\frac{\partial \phi_{sc}}{\partial R} - i k \phi_{sc} \right) = 0 \quad \dots (7) \quad G - \frac{1}{4\pi r} : \text{正則} \quad \dots (12)$$

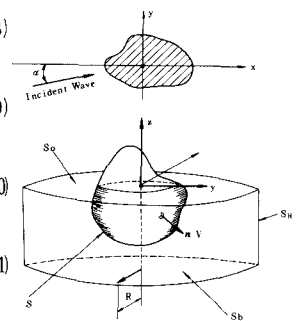


FIG. 1 DEFINITION SKETCH

(8)~(12)式を満たすグリーン関数は、J.V.Wehausen, E.V.Laiton によって次式のように求められている。

$$G\left(\begin{matrix} x, y, z \\ \xi, \eta, \zeta \end{matrix}\right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + 2P.V. \int_0^{\infty} \frac{(\mu + \lambda) \exp(-\mu h) \cosh \mu(h+z) \cosh \mu(h+\zeta)}{\mu \sinh \mu h - \lambda \cosh \mu h} J_0(\mu R) d\mu \\ + i \frac{2\pi(k^2 - \lambda^2)}{k^2 h - \lambda^2 h + \lambda} \cosh k(h+z) \cosh k(h+\zeta) J_0(kR) \quad \dots\dots (13)$$

また同様に、グリーン関数の級数表示が、John によって求められている。

$$G\left(\begin{matrix} x, y, z \\ \xi, \eta, \zeta \end{matrix}\right) = i \frac{2\pi(k^2 - \lambda^2)}{k^2 h - \lambda^2 h + \lambda} \cosh k(h+z) \cosh k(h+\zeta) Ho^{(1)}(kR) \\ + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 + \lambda^2}{\mu_k^2 h + \lambda^2 h - \lambda} \cos \mu_k(h+z) \cos \mu_k(h+\zeta) Ko(\mu_k R) \quad \dots\dots (14)$$

ここで、 $J_0(z)$ ：第1種ベッセル関数、 $H_0^{(1)}(z)$ ：ハンケル関数、 $K_0(z)$ ：第2種変形ベッセル関数、 h ：水深、
P.V.：Principal Value、 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ 、 $r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2h+\zeta)^2}$ 、
 $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ 、 $\lambda = \sigma^2/g$ 、 k ：波数 ($k = 2\pi/L$)、 μ_k ：固有値 ($\mu_k \tan \mu_k h = -\lambda$ の実正根
 $\mu_1 < \mu_2 < \dots$)

ただし座標系は FIG. 1 にしたがうものとする。また、FIG. 1 の領域 V とその
表面 S にグリーン の定理を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} 4\pi \int_V (\phi_{sc} \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi_{sc}) d\tau &= \int_S (\phi_{sc} \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi_{sc}}{\partial n}) d\sigma \\ + \int_{S_0} (\phi_{sc} \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial \phi_{sc}}{\partial z}) d\sigma &+ \int_{S_R} (\phi_{sc} \frac{\partial G}{\partial R} - G \frac{\partial \phi_{sc}}{\partial R}) d\sigma \\ - \int_{S_b} (\phi_{sc} \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial \phi_{sc}}{\partial z}) d\sigma &\dots\dots(15) \end{aligned}$$

(15)式の両辺で(3)~(11)式を考慮すると次の *Fredholm* 型積分方程式が得られる。

$$\phi_{sc}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \{ \phi_{sc}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta, \zeta) + G(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} \phi_{in}(x, y, z) \} d\sigma \dots\dots(16)$$

ただし入射波のポテンシャルは x 軸の負方向からの入射角を α とすれば、次式のように表わせるものとする。

$$\phi_{in}(x, y, z) = -\frac{igH}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \exp \{ ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \} \dots\dots(17)$$

(16)式から厳密解を得るのは困難なので数値計算によって解く。物体表面を FIG. 2 のように N 個の小面積要
素に分割し、各要素内で ϕ_{sc} は一定であるとする、積分方程式(16)は次のような複素係数連立1次方程式となる。

$$\phi_{sc}(i) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N (\phi_{sc}(j) \frac{\partial G_{ij}}{\partial n} + G_{ij} \frac{\partial \phi_{in}(j)}{\partial n}) \Delta S_j \quad (i = 1 \sim N) \dots\dots(18)$$

(18)式を解く事によって散乱波のポテンシャル関数値が得られ、これより波圧 P は次式によって求まる。

$$P/\rho = i\sigma (\phi_{sc}(x, y, z) + \phi_{in}(x, y, z)) \exp(-i\sigma t) \dots\dots(19)$$

3. 結果と考察

このような方法で求めた波圧分布を FIG. 3、FIG. 4 にまとめた。FIG. 3 は円筒構造物について回折理
論による波圧と比較したものであるが非常に良く一致している。周期1秒のとき若干差異が認められるが、
これは条件が深海波に近くなりこのとき波数計算の精度が波圧計算
にかなりの影響を持つ事が原因として考えられる。FIG. 4 は角筒
構造物に関しての数値計算例であり、実験値と比較しても良く一致
している。以上の数値計算の結果からグリーン関数を用いる解析法
の有効性を示す事ができたが、特異点での計算法、実験値との比較
の詳細は別の機会にゆずる。またこの計算法を大型海洋構造物の設
計に応用するために構造物を12種類の基本形状に分類し、この組
合せによって任意形状海洋構造物に作用する波圧の解析システムを
開発した。

4. 謝辞

この研究にあたり、東京工業大学日野幹雄教授、電力中央研究所
宮永洋一氏に貴重な助言をいただいた事を深く感謝します。

5. 参考文献

- 1) 日野幹雄・宮永洋一：任意形状の海洋構造物に作用する波力
ーグリーン関数による解、第5回海洋開発シンポジウム講演集、1974。

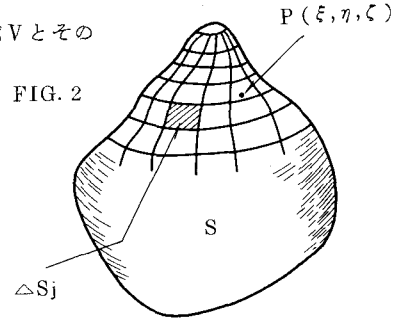


FIG. 2

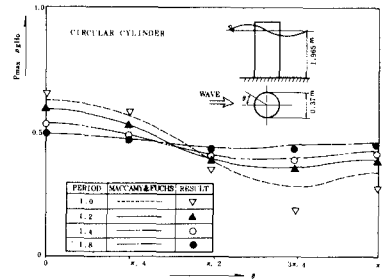


FIG. 3 COMPARISON OF COMPUTER RESULTS WITH EXACT SOLUTION

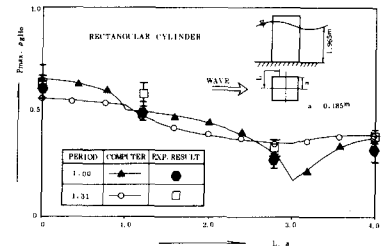


FIG. 4 COMPARISON OF COMPUTER RESULTS WITH EXPERIMENTAL RESULTS