II-14　単一の衝撃による2次元深水波について

東京都立大学工学部　正会員　丸井信雄

1. はしがき

衝撃によって生ずる連続でない水波について，線形波として論じているものには，Cauchy－Poisson の理論（Lamb：“Hydrodynamics” 6th ed. PP. 238－240，1932），Lord KELVIN の理論（Math. and Phys. Papers, vol. 4, pp. 419－456, 1910.）などがあり，2次元の深水の場合について，それが parmanent の波でなく，伝播するに従って変形するもの（unsteady）であることを示している。実験的に，このような波は静止している池の中央に石を投げ入れた時に生ずる波紋のように，深水における3次元波として，また2次元的には，実験水路において造波板を1～2回だけ動かした場合の浅水波として，多くの観察や実験が報告されていて，一般にその存在が確認されている（厳密に2次元深水波としての実験は困難であるが）ことである。

水の波を理論的に解明するためには，2次元の深水波が基本的であり，波を起こす衝撃が単純なものの場合から理論を展開しなければならないものと考えられるので，ここに，線形波動としての一つの理論結果を提示する。

2. 基本方程式

2次元深水の場合とし，波の進行方向をx，鉛直上向をy，時間をtとし，静止水面を $y=-h\ (h>0)$，波面の静止水面からの上昇量を η とすると；速度ポテンシャル $\phi(x,y,t)$ に関して線形化した基本式は；

(a) 表面条件式；

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial y}=0\quad\cdots(1)\ ,\quad \eta=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{y=-h}\quad\cdots\cdots(2)$$

(b) 速度ポテンシャル；

$$\phi=A\,e^{\frac{gt^2y}{4\rho^2}}\left[\left\{\frac{y\sqrt{\rho-y}+x\sqrt{\rho+y}}{\rho^3}+\frac{gt^2}{2}\frac{(y^2-x^2)\sqrt{\rho-y}+2xy\sqrt{\rho+y}}{\rho^5}\right\}\cos\frac{gt^2x}{4\rho^2}\right.$$
$$\left.-\left\{\frac{x\sqrt{\rho-y}-y\sqrt{\rho+y}}{\rho^3}+\frac{gt^2}{2}\frac{2xy\sqrt{\rho-y}-(y^2-x^2)\sqrt{\rho+y}}{\rho^5}\right\}\sin\frac{gt^2x}{4\rho^2}\right],\quad\cdots(3)$$

ここに，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，g：重力の加速度，A：初期に与えられるエネルギーなどによる定数，上式で与えられる ϕ は式(1) および Laplace の式 $\nabla^2\phi=0$ を満足する。

(c) 波のエネルギー：

(i) 位置エネルギー（E_p）（水表面単位面積当り）

$$E_p=\frac{\rho g}{2}\eta^2\quad\cdots\cdots(4)$$

(ii) 運動エネルギー（E_k）（水表面単位面積当り）

$$E_k=\int_{-\infty}^{-h}\frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\}dy\quad\cdots\cdots(5)$$

(iii) 輸送されるエネルギー（$\overline{W}$）（単位幅，単位時間当り）

速度ポテンシャルを上式(3) のように与えると，質量輸送は無いから，xの正方向に輸送されるエネルギーは水面から無限の水底までの一つの鉛直面において，単位時間にxの正の側に対してなされる仕事量であり，次式で与えられる：

$$\overline{W}=\int_{-\infty}^{-h}p\frac{\partial\phi}{\partial x}dy=-\rho\int_{-\infty}^{-h}\frac{\partial\phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}dy\quad\cdots\cdots(6)$$

この理論では，初期$(t=0)$に与えられたエネルギーがxのあらゆる位置において，$t=0\sim\infty$の間に輸送されるエネルギーと等しい（すなわち，エネルギーの増減はないこと）ことを条件とし，それを満足することが確かめられる。

3. 波形およびその伝播について

式(3)のϕを用いて式(2)の波形$\eta(x,t)$を求めると；

$$\eta=\frac{At}{2}e^{-\frac{gt^2h}{4\rho_1^2}}\left[\left\{3\frac{-(h^2-x^2)\sqrt{\rho_1+h}+2hx\sqrt{\rho_1-h}}{\rho_1^5}+\frac{gt^2}{2}\frac{(h^3-3hx^2)\sqrt{\rho_1+h}+(x^3-3h^2x)\sqrt{\rho_1-h}}{\rho_1^7}\right\}\cos\frac{gt^2x}{4\rho_1^2}\right.$$
$$\left.-\left\{3\frac{2hx\sqrt{\rho_1+h}+(h^2-x^2)\sqrt{\rho_1-h}}{\rho_1^5}+\frac{gt^2}{2}\cdot\frac{(x^3-3h^2x)\sqrt{\rho_1+h}-(h^3-3hx^2)\sqrt{\rho_1-h}}{\rho_1^7}\right\}\sin\frac{gt^2x}{4\rho_1^2}\right],$$
$$\rho_1=\sqrt{x^2+h^2}, \quad \cdots\cdots(7)$$

いま，無次元表示にするために，$x/h=\xi$，$gt^2/4h=\tau^2$とおくと，上式(7)は次のようになる；

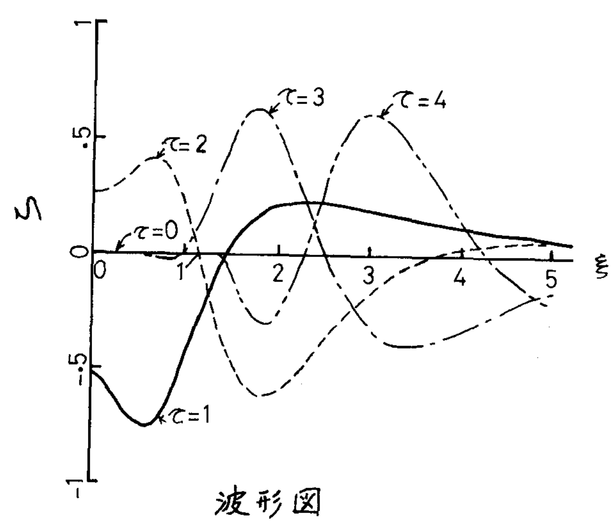
$$\frac{\eta}{h}=\frac{A}{\sqrt{gh^3}}\tau\cdot e^{-\frac{\tau^2}{\xi^2+1}}\left[\left\{3\frac{(\xi^2-1)\sqrt{\sqrt{\xi^2+1}+1}+2\xi\sqrt{\sqrt{\xi^2+1}-1}}{(\xi^2+1)^{5/2}}\right.\right.$$
$$\left.+2\frac{\tau^2}{\xi^2+1}\frac{-(3\xi^2-1)\sqrt{\sqrt{\xi^2+1}+1}+\xi(\xi^2-3)\sqrt{\sqrt{\xi^2+1}-1}}{(\xi^2+1)^{5/2}}\right\}\cos\frac{\xi\tau^2}{\xi^2+1}$$
$$\left.-\left\{3\frac{2\xi\sqrt{\sqrt{\xi^2+1}+1}-(\xi^2-1)\sqrt{\sqrt{\xi^2+1}-1}}{(\xi^2+1)^{5/2}}+2\frac{\tau^2}{\xi^2+1}\cdot\frac{\xi(\xi^2-3)\sqrt{\sqrt{\xi^2+1}+1}+(3\xi^2-1)\sqrt{\sqrt{\xi^2+1}-1}}{(\xi^2+1)^{5/2}}\right\}\sin\frac{\xi\tau^2}{\xi^2+1}\right] \quad \cdots\cdots(8)$$

式(8)を図示すると，右図のようになる。

この波は初期$(t=0)$に$\eta=0$であって，静止状態（水面水平）から波動が始まることを表わし，初期に与えられるエネルギーは初速度による運動エネルギーだけである。その運動エネルギーは次のように計算される；

$$\int_0^x\int_{-\infty}^{-h}\frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\}_{t=0}dy\,dx$$
$$=\frac{3\rho A^2}{4h^3}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}+\frac{2}{3}\frac{(x^2+h^2)^{3/2}}{x^3}-\frac{2}{3}\frac{h^3}{x^3}\right]\cdots(9)$$

一方，輸送されるエネルギーは式(6)で与えられるものを$t=0\sim\infty$で積分して，式(9)の結果と同じ結果を得る。よって，$t=0$において，$0\sim x$の間に存在した運動エネルギーはすべてxの鉛直面を通して，$t=0\sim\infty$の間に伝達され，その間に過不足はない。



波形図

4. おわりに： ここに提示した波はLord KELVINの波と理論の根本ではほとんど違わないようであるが，Kelvinの波では初期の条件として，水面の変形量（上昇量）を与えて，速度を0としているので，速度ポテンシャルの形に本論との差違が生じている。実際に静止水面にどのような衝撃を与えると水面が変形した上に，速度が0にならしめる方法があるだろうか。また，Cauchy - Poissonの波ではエネルギーが増大して行くこと，波源の振動が無限に増大していくことなどの矛盾があるのである。