

京都大学大学院 学生員 西村直志  
京都大学工学部 正員 小林昭一

## 1 はじめに

表面クラックの解析は、破壊力学に於ける重要な問題の一つである。しかし、その3次元解析は困難であり、種々の手法が試みられているが必ずしも十分であるとは言えない。一方、近年線形境界値問題の数値解析法として注目されている積分方程式法は、解析対象よりも1次元下った形で定式化されるため、3次元外部問題に有効である。本研究では表面クラックの応力場、変位場を積分方程式法により解析し、併せて破壊力学の立場から考察を行なった。

## 2 解析手法

静弾性学の基礎式は、物体力を省略して次の様になる

$$(\mathbf{C}:(\nabla \nabla)) \cdot \nabla = 0 \quad (1)$$

ここに  $u$  は変位、 $\mathbf{C}$  は弾性定数である。積分方程式法では (1) と等価な積分表現を用いるが、ここでは次の1重層ポテンシャル表示を用いるのがよい。即ち、考える弾性体を  $D$  とすると、

$$u(x) = \int_{\partial D} \mathbf{G}(x; y) \cdot \varphi(y) dy, \quad z(x) = \int_{\partial D} \mathbf{S}(x; y) \cdot \varphi(y) dy \quad x \in D, y \in \partial D. \quad (2)$$

ここに  $\mathbf{G}$  は (1) 式の Green テンソルであり、 $\mathbf{S}$  は対応する応力である。また  $z(x)$  は点  $x$  での求めようとする応力である。 $\varphi$  は境界に於ける密度と言われるベクトル値関数であり、未知である。応力境界値問題では  $\varphi$  は次式から決定される。

$$\varphi(x) = \varphi(x)/2 + \int_{\partial D} \mathbf{T}(x; y) \cdot \varphi(y) dy \quad x, y \in \partial D \quad (3)$$

ここに  $\varphi$  は点  $x$  での表面力、 $\mathbf{T}$  は  $\mathbf{G}$  に対応する表面力である。数値計算では次の様な離散化を行なって、近似的に (3) 式を解いている。

$$\varphi(x^i) = \varphi^i/2 + \sum_{j=1}^N \int_{\partial D} \mathbf{T}(x^i; y_j) \cdot \varphi^j \varpi_j(y_j) dy_j \quad x^i, y_j \in \partial D \quad (4)$$

ここに  $x^i$  は  $N$  個の代表点であり  $\varpi_j$  は対応する形状関数である。 $\varphi^j$  は数ベクトルになる。(4) は  $3n$  元連立方程式であるので、これを解いて同様な離散化を (2) に用いれば、変位、応力が求まる。

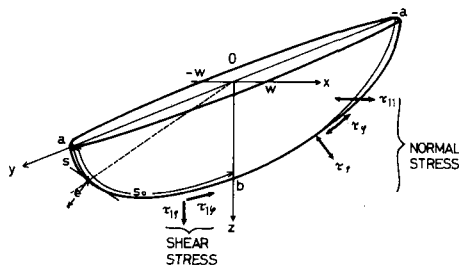
本解析では、表面効果を導入するため、Mindlin 解を積分核とした。境界は有限個の三角形または四角形の和として近似し、ある要素上で1、その他で0となる様な形状関数を用いた。なお、積分は特異性を有する部分 (Kelvin 解) は厳密に、その他の項は Gauss 積分を用いて評価した。

## 3 解析結果

図1に解析したクラックを示した。一般に積分方程式法では完全に扁平なクラックは (図では  $W=0$ ) 扱えないので、非常に鋭い楕円体としてモデル化を行なった。

## 1) 精度のチェック

上記の問題の特殊な場合として、半球状切欠が無限度で等方応力 ( $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$ ) を受ける場



SHAPE OF CRACK  
AND STRESS COMPONENTS 図 1

合(図2)及び単純引張( $\sigma_{11} = 1$ )を受ける場合(図3)について解析した。図2の場合には、Eubanksの解析解があるが、十分な精度(誤差2%)が出ている事がわかる。

## 2) クラックの解析

図4には使用したモデル化のうち、3角形要素のものを示した。対称性を利用したので、全体の1/4部分で十分である。要素は77(全体では308)である。なお、以下の計算に用いたPoisson比は0.2である。図5に無限遠で $\sigma_{11}$ を受けた場合の変位ベクトルを示した。 $x$ 成分及び $y$ 成分が卓越している事がわかる。自由面での開口変位(C.O.D)は重要なパラメータとされているが、 $z$ 方向にも同じオーダーの変位がある事に注意されたい(この計算には、48要素が用いられている)。図6は、同じ応力の下で、クラックの長さを $b/a$ (図1参照) $= 0.25 \sim 1$ とした場合の、クラックチップ

近傍の $\sigma_{11}$ の分布である。 $\sigma_{11}$ の最大値を生ずる位置は、長いクラック( $b/a$ :小)の場合クラック中央であるが、短い( $b/a$ :大)場合には、より自由面に近い位置に移動する事がわかる。図7は、無限遠で一般的な断力 $\sigma_{11}$ を受けた時の $\sigma_{11}$

(図1参照)を示したものである。これは破壊力学のモードⅢに対応する応力成分である。図6の結果などを考慮して計算すれば、クラック中央の主応力が最大となるのは無限遠からほぼ $x$ 軸方向の引張応力を受けた場合である事が結論される。その他の結果の詳細は、当日発表する予定である。

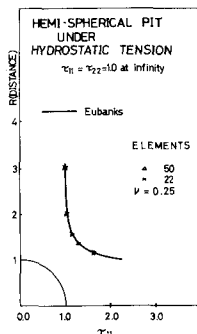


図 2

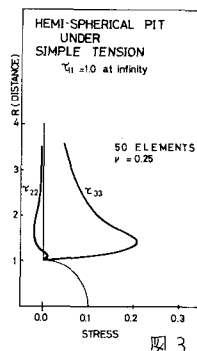


図 3

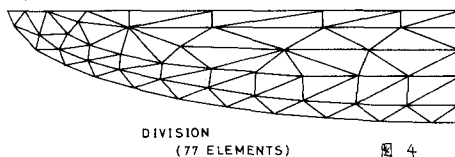
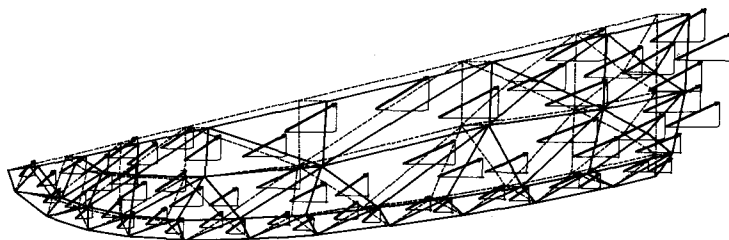


図 4



DISPLACEMENT VECTOR



図 5

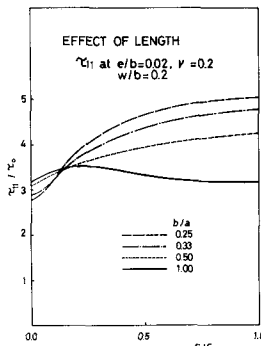


図 6

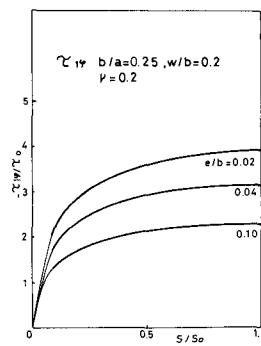


図 7